مدارهای مجتمع اپتیکی

تالیف

حمید عباسی

تقدیم به روح آسمانی پدر عزیزم و مادر عزیزم

مولف : حمید عباسی

طراح جلد و صفحه‌آرا : حمید عباسی

چاپ و صحافی : کوفا

نوبت و سال چاپ : اول ، ۱۴۰۲

شمارگان : ۵۰۰ نسخه

نشر ورسه

سرشناسه : عباسی، حمید، ۱۳۶۷-

عنوان و نام پدیدآور : مدارهای مجتمع اپتیکی/ حمید عباسی.

مشخصات نشر : آمل: نشر ورسه ،۱۴۰۲.

مشخصات ظاهری : ۷۶ص.: مصور،جدول،نمودار.

شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۹۰۵۲۷-۴-۷

وضعیت فهرست نویسی : فیپا

یادداشت : کتابنامه:ص.۷۴-۷۶.

موضوع : موج برهای نوری، الکترونیک نوری و پلیمرهای نوری

رده بندی کنگره : TK۸۳۰۵

رده بندی دیویی : ۶۲۱/۳۸۱۵۲

شماره کتابشناسی ملی : ۹۴۹۳۶۱۳

اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

پیشگفتار نویسنده

درس مدارهای مجتمع اپتیکی از درس‌های مقطع کارشناسی ارشد فوتونیك می‌باشد. این درس از چهار فصل تئوری موجی موجبرهای نوری، موجبرهای نوری مسطح، فیبر نوری و نظریه جفت شدگی مدها تشکیل شده است. تمام تلاشم برقراری ارتباط نزدیك و بهتر دانشجو با این درس بوده است. امیدوارم تلاشم باعث پیشرفت علمی دانشجویان و محققان عزیز این رشته علمی شود.

حمید عباسی

فهرست نوشتار

فصل اول : تئوری موجی موجبرهای نوری

۱-۱. ساختار موجبر

فیبرهای نوری و موجبرهای نوری، شامل یک هسته و یک روکش اطراف هسته می‌باشند (شکل ۱-۱). ضریب شکست هسته (n_1) بیشتر از ضریب شکست روکش (n_0) است. بنابراین انتشار نور در موجبرها بر اساس اصل بازتابش کلی است. شرط انعکاس کلی داخلی در رابط هسته- روکش با رابطه $n_1 \sin(\pi/2-\boldsymbol{\phi}) \gg n_0$ داده می‌شود. از آنجایی که زاویه $\boldsymbol{\phi}$ از طریق رابطه $\sin\theta = n_1\boldsymbol{\phi} \ll \sqrt{n_1^2 - n_0^2}$ با زاویه برخورد θ مرتبط است. شرایط بحرانی برای بازتاب داخلی کل برابر است با :

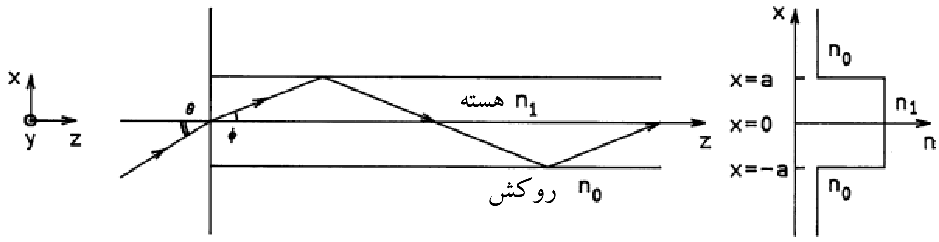
$$\boldsymbol{\phi} \ll sin^{-1}\sqrt{n_1^2 - n_0^2} \cong \theta_{max} \qquad (۱.۱)$$

θ_{max} بیشترین زاویه پذیرش موجبر است و به عنوان روزنه عددی NA شناخته می‌شود. همچنین تفاوت نسبی ضریب شکست بین n_1 و n_0 به صورت زیر می‌باشد :

$$\Delta= \frac{n_1^2-n_0^2}{2n_1^2} = \frac{(n_1-n_0)(n_1+n_0)}{2n_1^2} = \frac{(n_1-n_0)2n_1}{2n_1^2} \cong \frac{n_1-n_0}{n_1} \qquad (۱.۲)$$

گاهی اوقات، Δ به صورت زیر می‌باشد :

$$NA = \theta_{max} = n_1\sqrt{2\Delta} \qquad (۱.۳)$$



شکل ۱-۱. ساختار اصلی و نمایه ضریب شکست موجبر نوری.

۱-۲. شکل‌گیری مدهای هدایت‌شده

شرایط انتشار نور در موجبرها در قالب مد به دو روش اپتیک هندسی و حل معادله موج، قابل بررسی می‌باشد. در اینجا روش اپتیک هندسی را بیان می‌کنیم (شکل ۱-۲ الف). موج در امتداد محور z و با زاویه‌ی $\boldsymbol{\phi}$ منتشر می‌شود. طول موج و بردار موج نور در هسته به ترتیب برابر با λ/n_1 و kn_1 $(k = 2\pi/\lambda)$ هستند. ثابت‌های انتشار در امتداد z و x با β و k بیان می‌شوند:

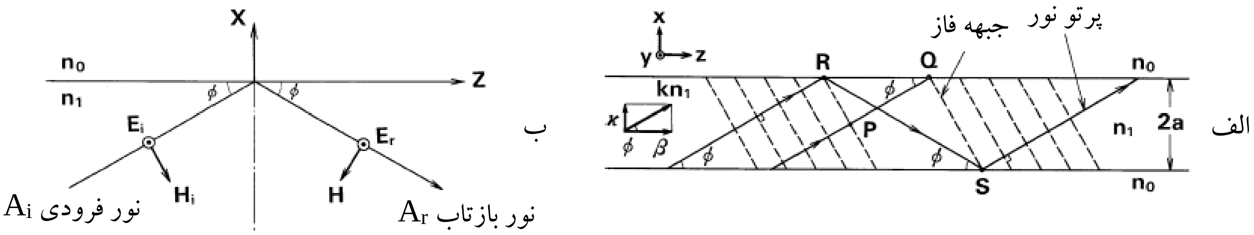
$$\beta = k_1 n_1 \cos\boldsymbol{\phi} \qquad (۱.۴) \qquad\qquad k = k n_1 \sin\boldsymbol{\phi} \qquad (۱.۵)$$

ضریب انعکاس نور در بازتاب کلی داخلی برای حالتی که قطبش نور عمود بر صفحه‌ی فرود است (شکل ۲-۱ ب) ، برابر است با :

$$r = \frac{A_r}{A_i} = \frac{n_1 sin\phi + j\sqrt{{n_1}^2 cos^2\phi - {n_0}^2}}{n_1 sin\phi - j\sqrt{{n_1}^2 cos^2\phi - {n_0}^2}} \qquad (۱.۶)$$

اگر ضریب بازتاب مختلط r را به صورت $r = exp(-j\phi)$ بیان کنیم، مقدار تغییر فاز برابر می‌شود با :

$$\boldsymbol{\Phi} = -2tan^{-1} \frac{\sqrt{{n_1}^2\, cos^2\phi - {n_0}^2}}{n_1 sin\phi} \qquad (۱.۷)$$



شکل ۲-۱. الف. پرتوهای نور و جبهه فاز آن‌ها در موجبر. ب. بازتاب کلی یک موج مسطح در یک رابط دی الکتریک.

با توجه به اختلاف فاز بین دو پرتو نور متعلق به یک موج مسطح (در شکل ۲-۱ الف) ، پرتو نور PQ که از نقطه P به Q منتشر می شود، تحت تأثیر بازتاب قرار نمی‌گیرد. از سوی دیگر، پرتو نور RS، که از نقطه R به S منتشر می‌شود، دو بار منعکس می‌شود (در سطح بالایی و پایینی رابط‌های هسته- روکش). چون نقاط P و R یا نقاط Q و S در یک جبهه فاز قرار دارند، مسیرهای نوری PQ و RS باید برابر باشند یا تفاوت آنها باید مضرب انتگرال ۲ باشد. با توجه به اینکه فاصله بین نقاط Q و R برابر با $2a\ tan\boldsymbol{\phi} - 2a/tan\boldsymbol{\phi}$ می‌باشد، بنابراین فاصله بین نقاط P و Q برابر است با :

$$\ell_1 = (\frac{2a}{tan\phi} - 2atan\phi)cos\phi = 2a(\frac{1}{sin\phi} - 2a\ sin\phi) \qquad (۱.۸)$$

همچنین فاصله بین نقاط R و S برابر است با :

$$\ell_2 = \frac{2A}{sin\phi} \qquad (۱.۹)$$

شرط هم‌فازی برای دو طول راه نوری مسیرهای PQ و RS برابر است با :

$$(Kn_1\ell_2 + 2\phi) - Kn_1\ell_1 = 2m\pi \qquad (۱.۱۰)$$

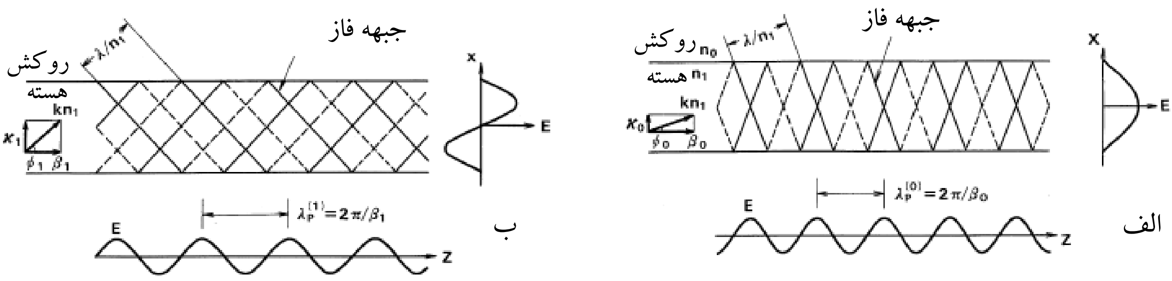
با جایگزاری روابط (۱.۸)، (۱.۹) و (۱.۱۰) در رابطه (۱.۷)، شرط انتشار در زاویه $\boldsymbol{\phi}$ بدست می‌آید :

$$tan(Kn_1 a\ sin\phi - \frac{m\pi}{2}) = \sqrt{\frac{2\Delta}{sin^2\phi} - 1} \qquad (۱.۱۱)$$

رابطه (۱.۱۱) نشان می‌دهد که زاویه پرتو نوری، گسسته است و توسط ساختار موج‌بر (شعاع هسته a، ضریب شکست n_1، اختلاف ضریب شکست) و طول موج منبع نور (عدد موج $k = 2$) تعیین می‌شود. توزیع میدان نوری که شرط هم‌فازی را برآورده می‌کند، مد نامیده می‌شود. حالتی که حداقل زاویه ϕ را در معادله (۱.۱۱) دارد، به ازای $m = 0$ بدست می‌آید و به عنوان مد اصلی شناخته می‌شود و مدهای دیگر دارای زوایای بزرگتر و از مدهای مرتبه بالاتر $m \gg 1$ می‌باشند (شکل ۳-۱). دامنه میدان الکتریکی، در نقطه‌ای که دو جبهه فاز مثبت (منفی) تداخل دارند به حداکثر (حداقل) تبدیل می‌شود و هنگامی که یک جبهه فاز مثبت با یک جبهه فاز منفی تداخل داشته باشد، میدان الکتریکی صفر می‌شود، زیرا جبهه فاز مثبت و منفی یکدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین توزیع میدان در راستای x به یک موج ثابت تبدیل می‌شود و به طور متناوب در راستای z با تناوب $\lambda_P = \lambda/\cos\phi = 2\pi/\beta$ تغییر می‌کند. چون $n_1\sin\phi = \sin\theta \ll \sqrt{{n_1}^2 - {n_0}^2}$ ، با استفاده از روابط (۱.۱) و (۱.۲) ، زاویه انتشار را بدست می‌آورد، پس می‌توان با استفاده از $\xi = \sin\phi/\sqrt{2\Delta} - 1$، معادله (۱.۱۱) را به صورت زیر بازنویسی کرد :

$$K n_1 a \sqrt{2\Delta} = \frac{\cos^{-1}\xi + m\pi/2}{\xi} \qquad (۱.۱۲)$$

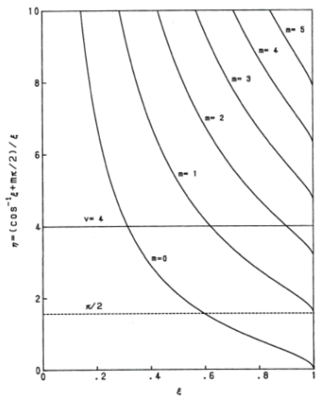
عبارت سمت چپ معادله (۱.۱۲)، به عنوان فرکانس نرمالیزه (υ) شناخته می‌شود و هنگامی که از آن استفاده کنیم، می‌توان ویژگی‌های انتشار پرتو در موج‌برها را به طور کلی و مستقل از هر ساختار موج‌بر، بررسی کرد. رابطه بین فرکانس نرمالیزه (υ) و ثابت انتشار (ξ) ، معادله پراکندگی نامیده می‌شود.



شکل ۳-۱. شکل گیری مدها (امواج ایستاده) برای (الف) حالت بنیادی و (ب) یک حالت مرتبه بالاتر به ترتیب از طریق تداخل امواج نور (خط یکپارچه نمایانگر یک جبهه فاز مثبت و خط نقطه چین یک جبهه فاز منفی است).

شکل ۴-۱، منحنی‌های پراکندگی یک موج‌بر صفحه‌ای را نشان می‌دهد. محل تلاقی منحنی $\eta = \frac{\cos^{-1}\xi + m\pi/2}{\xi}$ و $\eta = \upsilon$ مقدار ξ_m را برای هر مد می‌دهد و از طریق آن می‌توان ثابت انتشار β_m را بدست آورد. هنگامی که $\upsilon < \upsilon_c = \frac{\pi}{2\xi}$ باشد، مقدار مد اصلی برابر با $m = 0$ می‌باشد که این یک شرط تعیین کننده برای یک موج‌بر تک مد می‌باشد، یعنی مدهای مرتبه بالاتر قطع شده‌اند و مقدار υ قطع، تعیین کننده طول موج قطع موج‌بر می‌باشد :

$$\lambda_c \sqrt{2\Delta} = \frac{\sqrt{2\Delta}}{\upsilon_c} a\, n_1 \sqrt{2\Delta} \qquad (۱.۱۳)$$



شکل ۴-۱. منحنی‌های پراکندگی یک موج‌بر صفحه‌ای

۳-۱. معادلات ماکسول

معادلات ماکسول در یک محیط دی‌الکتریک همگن و بدون تلفات بر حسب میدان الکتریکی e و میدان مغناطیسی h به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla \times e = -\mu \frac{\partial h}{\partial t} \qquad (۱.۱۴) \qquad\qquad \nabla \times h = \varepsilon \frac{\partial e}{\partial t} \qquad (۱.۱۵)$$

که در آن ε و μ به ترتیب، گذردهی و نفوذپذیری محیط را نشان می‌دهند و به مقادیر مربوطه خود در خلاء مربوط می‌شوند :

$$\varepsilon = \varepsilon_0\, n^2 \qquad (۱.۱۶) \qquad\qquad \mu = \mu_0 \qquad (۱.۱۷)$$

که در آن n ضریب شکست است. سپس تعداد موج نور در محیط به صورت زیر بیان می‌شود :

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega n\sqrt{\varepsilon_0\, \mu_0} = k\,\mathrm{n} \qquad (۱.۱۸)$$

در معادله (۱.۱۸)، ω فرکانس زاویه‌ای میدان‌های الکترومغناطیسی سینوسی متغیر، با توجه به زمان است. k عدد موجی در خلاء است که با فرکانس زاویه‌ای ω در ارتباط است :

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\, \mu_0} = \frac{\omega}{c} \qquad (۱.۱۹)$$

در معادله (۱.۱۹)، c سرعت نور در خلاء است که برابر است با :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\, \mu_0}} = 2.988\times 10^{8}\ \ [\mathrm{m/s}] \qquad (۱.۲۰)$$

واحدهای سرعت نور (m/s) از واحدهای گذردهی [F/m] ε_0 و نفوذپذیری [H/m] μ_0 بدست می‌آید ($\frac{1}{\sqrt{[\mathrm{F/m}][\mathrm{H/m}]}} = \frac{m}{\sqrt{\mathrm{F.H}}} = \frac{m}{\sqrt{[\mathrm{A.s/V}][\mathrm{V.s/A}]}} = \frac{m}{\mathrm{s}}$). هنگامی که فرکانس موج الکترومغناطیسی، f [Hz] باشد، c/f [m] در یک دوره تغییرات سینوسی منتشر می‌شود. سپس طول موج موج الکترومغناطیسی بدست می‌آید :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{\omega/k}{f} = \frac{2\pi}{k} \qquad (\omega = 2\pi f) \qquad (۱.۲۱)$$

هنگامی که میدان‌های الکترومغناطیسی e و h، توابع سینوسی زمان هستند با دامنه‌های پیچیده نشان داده می‌شوند (یعنی به اصطلاح فازورها). به عنوان مثال بردار میدان الکتریکی را در نظر بگیرید :

$$e(t) = |E|\cos(\omega t + \phi) \qquad (۱.۲۲)$$

که در آن E دامنه و ϕ فاز است. تعریف دامنه مختلط e(t) به صورت زیر است :

$$E = |E|\cos e^{j\phi} \qquad (۱.۲۳)$$

معادله (۱.۲۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$e(t) = \mathrm{Re}\{Ee^{j\omega t}\} \qquad (۱.۲۴)$$

e(t) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$e(t) = Ee^{j\omega t} \qquad (۱.۲۵)$$

مقصود از معادله‌ی بالا، قسمت حقیقی $Ee^{j\omega t}$ است. اگر موج الکترومغناطیسی را با فرکانس زاویه‌ای ω و انتشار در جهت z با ثابت انتشار β در نظر بگیریم، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد :

$$e = E(r)e^{j(\omega t - \beta z)} \qquad (۱.۲۶)$$

$$h = H(r)e^{j(\omega t - \beta z)} \qquad (۱.۲۷)$$

جایی که r موقعیت در صفحه عرضی محور z را نشان می‌دهد. با جایگزینی معادلات (۱.۲۶) و (۱.۲۷) در معادلات (۱.۱۴) و (۱.۱۵)، مجموعه معادلات (۱.۲۸) در مختصات دکارتی بدست می‌آیند. این معادلات مبنایی برای تجزیه و تحلیل موج‌برهای دال و مستطیلی هستند. برای تجزیه و تحلیل انتشار موج در فیبرهای نوری که به صورت محوری متقارن هستند، معادلات ماکسول بر حسب مختصات استوانه‌ای نوشته می‌شود (معادلات (۱.۲۹)).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu_0 H_x \\ -j\beta E_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_x \\ -j\beta H_x - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_y \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_z \end{cases} \qquad (۱.۲۸)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_z}{\partial \theta} + j\beta E_\theta = -j\omega\mu_0 H_r \\ -j\beta E_r - \dfrac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega\mu_0 H_\theta \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_r}{\partial \theta} = -j\omega\mu_0 H_z \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H_z}{\partial \theta} + +j\beta H_\theta = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_r \\ -j\beta H_r - \dfrac{\partial H_z}{\partial r} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_\theta \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \dfrac{\partial H_r}{\partial \theta} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_z \end{cases} \qquad (۱.۲۹)$$

معادلات ماکسول (۱.۲۸) یا (۱.۲۹) میدان الکترومغناطیسی را به طور کامل تعیین نمی‌کنند و فقط باید آنهایی را انتخاب کرد که شرایط مرزی مسئله مربوطه را نیز برآورده کنند. رایج‌ترین نوع شرایط مرزی هنگامی اتفاق می‌افتد که ناپیوستگی در ثابت دی الکتریک (ضریب شکست) وجود داشته باشد (شکل ۱-۱) :

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)} \qquad (۱.۳۰) \qquad\qquad H_t^{(1)} = H_t^{(2)} \qquad (۱.۳۱)$$

در مرز، اجزای مماسی میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی باید شرایط را برآورده کنند و در مرز پیوسته باشند. همچنین شرایط مرزی طبیعی وجود دارد که لازم است میدان های الکترومغناطیسی در بی نهایت صفر باشند. زیرنویس t در معادلات(۱.۳۰) و (۱.۳۱) ، مؤلفه‌های مماسی بر مرز را نشان می‌دهد و بالانویس‌های (۱) و (۲) ، نشان دهنده میدان هستند.

۴-۱. قدرت انتشار

طبق قضیه گاوس برای بردار A در حجم دلخواه V ، داریم :

$$\iiint_V \nabla . A \, dv = \iint_S A . n \, ds \qquad (۱.۳۲)$$

که در آن n بردار واحد رو به بیرون نرمال با سطح S است که V را در بر می‌گیرد و dv و ds به ترتیب حجم و سطح دیفرانسیل هستند. $A=e\times h$ را در معادله (۱.۳۲) قرار می‌دهیم و از هویت برداری، استفاده می‌کنیم:

$$\nabla . (\mathrm{e} \times \mathrm{h}) = h . \nabla \times e - e . \nabla \times \mathrm{h} \qquad (۱.۳۳)$$

معادله زیر را برای میدان های الکترومغناطیسی بدست می‌آوریم :

$$\iiint_V (h . \nabla \times e - e . \nabla \times \mathrm{h}) \, dv = \iint_S (\mathrm{e} \times \mathrm{h}) . n \, ds \qquad (۱.۳۴)$$

با جایگزینی معادلات (۱.۱۴) و (۱.۱۵) در معادله (۱.۳۴) داریم :

$$\iiint_V \left(\varepsilon e . \frac{\partial e}{\partial t} - \mu h . \frac{\partial h}{\partial t}\right) dv = - \iint_S (\mathrm{e} \times \mathrm{h}) . n \, ds \qquad (۱.۳۵)$$

عبارت اول در سمت چپ معادله (۱.۳۵) ، نشان دهنده نرخ افزایش انرژی ذخیره شده الکتریکی W_e است :

$$\varepsilon e . \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{2} e . e\right) = \frac{\partial W_e}{\partial t} \qquad (۱.۳۶)$$

عبارت دوم در سمت چپ معادله (۱.۳۵) ، نشان‌دهنده نرخ افزایش انرژی ذخیره شده مغناطیسی W_h است :

$$\mu h . \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu}{2} h . h\right) = \frac{\partial W_h}{\partial t} \qquad (۱.۳۷)$$

بنابراین، سمت چپ معادله (۱.۳۵) نرخ افزایش انرژی ذخیره شده الکترومغناطیسی را در کل حجم V نشان می‌دهد. هنگامی که بردار واحد جهت‌دار n را با بردار واحد جهت‌دار رو به داخل $u_z(=-n)$ جایگزین کنیم، توان کل جریان‌یافته به حجم از طریق سطح S با رابطه زیر بیان می‌شود :

$$P = \iint_S -(\mathrm{e} \times \mathrm{h}).n\, ds = \iint_S (\mathrm{e} \times \mathrm{h}).U_z\, ds \qquad (۱.۳۸)$$

معادله (۱.۳۸) یعنی $e\times h$ بردار نمایش‌دهنده شارش توان است و $(e\times h).u_z$ مقدار توانی را که در واحد سطح جریان دارد، نشان می‌دهد. بنابراین، بردار $e\times h$ چگالی شارش توان را نشان می‌دهد و

$$S = \mathrm{e} \times \mathrm{h}\ [\mathrm{W}/m^2] \qquad (۱.۳۹)$$

بردار پوئین‌تینگ نامیده می‌شود. در این معادله، e و h میدان‌های لحظه‌ای را تابعی از زمان t نشان می‌دهند. اگر بخواهیم میانگین چگالی شارش توان را در یک میدان متناوب بدست آوریم، میدان های الکتریکی و مغناطیسی پیچیده را می‌توان با استفاده از روابط زیر بیان کرد :

$$\mathrm{e(t)} = \mathrm{Re}\ \{\mathrm{E}\ e^{j\omega t}\} = \frac{1}{2}\ \{\mathrm{E}\ e^{j\omega t} + \mathrm{E}^*\ e^{-j\omega t}\} \qquad (۱.۴۰)$$

$$\mathrm{h(t)} = \mathrm{Re}\ \{\mathrm{H}\ e^{j\omega t}\} = \frac{1}{2}\ \{\mathrm{H}\ e^{j\omega t} + \mathrm{H}^*\ e^{-j\omega t}\} \qquad (۱.۴۱)$$

که در آن * نشان دهنده مزدوج مختلط است. سپس میانگین زمانی بردار پوینتینگ به زیر بیان می‌شود :

$$\langle S.u_z\rangle = \langle(\mathrm{e}\times\mathrm{h}).u_z\rangle\ \mathrm{Re}\ \{\mathrm{H}\ e^{j\omega t}\} = \frac{1}{4} < [(\mathrm{E}\ e^{j\omega t} + \mathrm{E}^*\ e^{-j\omega t}) \times (\mathrm{H}\ e^{j\omega t} + \mathrm{H}^*\ e^{-j\omega t})].\ u_z >$$

$$= \frac{1}{4}\ (\mathrm{E}\times\mathrm{H}^* + \mathrm{E}^*\times\mathrm{H}).\ u_z\ = \frac{1}{2}\ \mathrm{Re}\ \{(\mathrm{E}\times\mathrm{H}^*).\ u_z\} \qquad (۱.۴۲)$$

<> نشان دهنده میانگین زمانی است. میانگین زمانی شارش توان با رابطه زیر بیان می‌شود :

$$P = \iint_S -(\mathrm{e}\times\mathrm{h}).n\, ds = \iint_S \frac{1}{2}\ \mathrm{Re}\,\{(\mathrm{E}\ \times\ \mathrm{H}^*).u_z\}\, ds \qquad (۱.۴۳)$$

چون $\mathrm{E}\times\mathrm{H}^*$ در تجزیه و تحلیل موج‌برهای نوری، حقیقی می‌شود، میانگین زمانی قدرت انتشار در معادله (۱.۴۳) ، با رابطه زیر بیان می‌شود :

$$P = \iint_S \frac{1}{2}\ (\mathrm{E}\ \times\ \mathrm{H}^*).u_z\, ds \qquad (۱.۴۴)$$

فصل دوم : موجبرهای نوری مسطح

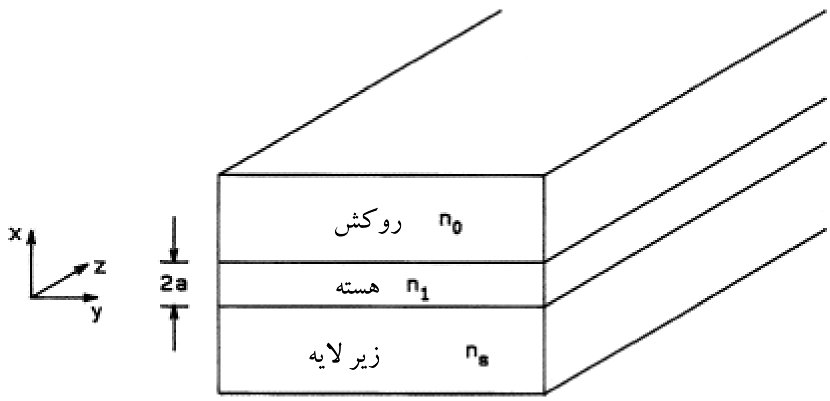
موج‌برهای نوری مسطح ابزارهای کلیدی برای ساخت مدارهای نوری یکپارچه و لیزرهای نیمه هادی هستند. به طور کلی، موج‌برهای مستطیلی شامل یک هسته مربع یا مستطیل شکل است که با روکشی با ضریب شکست کمتر از هسته احاطه شده است. تجزیه و تحلیل سه بعدی برای بررسی ویژگی‌های انتقال موج‌برهای مستطیلی ضروری است. با این حال، تجزیه و تحلیل سه بعدی دقیق به محاسبات عددی نیاز دارد و همیشه بینش روشنی از مسئله ارائه نمی‌دهد. بنابراین، این فصل ابتدا موج‌برهای صفحه‌ای دوبعدی را برای بدست آوردن درک اساسی از موج‌برهای نوری توصیف می کند. سپس چندین تقریب تحلیلی برای تحلیل موج‌برهای مستطیلی سه بعدی ارائه شده است. اگرچه این روش‌ها تقریبی هستند، اما مکانیسم ضروری انتقال موج نور در موج‌برهای مستطیلی را می‌توان به طور کامل بررسی کرد.

۱-۲. موج‌برهای صفحه‌ای (ورقه‌ای)

۱-۱-۲. استخراج معادلات پایه

در این بخش، تجزیه و تحلیل موج برای موج‌بر صفحه‌ای و ویژگی‌های انتشار آن توضیح داده می‌شود (شکل ۱-۲). برای ترمیم موج‌برهای نوری دی‌الکتریک، گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$ و نفوذپذیری $\mu = \mu_0$ را در معادله ماکسول (۱.۱۴) و (۱.۱۵) قرار می‌دهیم :

$$\nabla \times \tilde{E} = -\mu_0 \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \qquad \nabla \times \tilde{H} = \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} \qquad (۲.۱)$$



شکل ۱-۲. موج‌بر نوری صفحه‌ای

که در آن n ضریب شکست است. اگر موج صفحه‌ای به شکل زیر منتشر شود :

$$\tilde{E} = E(x,y)\, e^{j(\omega t - \beta z)} \qquad \tilde{H} = H(x,y)\, e^{j(\omega t - \beta z)} \qquad (۲.۲)$$

با جایگزینی معادلات (۲.۲) در معادلات (۲.۱)، معادلات زیر برای اجزای میدان الکترومغناطیسی بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu_0 H_X \\ -j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z \end{cases} \quad (۲.۳)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_X \\ -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_z \end{cases} \quad (۲.۴)$$

میدان‌های الکترومغناطیسی E و H در موج‌بر صفحه‌ای، هیچ وابستگی به محور y ندارند. بنابراین به $\frac{\partial E}{\partial y} = 0$ و $\frac{\partial H}{\partial y} = 0$ می‌رسیم و با قرار دادن این روابط در معادلات (۲.۳) و (۲.۴) ، دو حالت الکترومغناطیسی مستقل بدست می‌آید که به ترتیب با حالت TE و حالت TM مشخص می‌شوند :

$$\begin{cases} \frac{d^2E_y}{dx^2} + (k^2n^2 - \beta^2)E_y = 0 \\ H_x = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y \\ H_z = \frac{j}{\omega\mu_0}\frac{dE_y}{dx} \\ EX = EZ = HZ = 0 \end{cases} \quad (۲.۵)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\frac{1}{n^2}\frac{dH_y}{dx}) + (k^2 - \frac{\beta^2}{n^2})H_y = 0 \\ E_x = \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0 n^2} H_y \\ E_z = \frac{j}{\omega\varepsilon_0 n^2}\frac{dE_y}{dx} \\ Ey = Hy = HZ = 0 \end{cases} \quad (۲.۶)$$

مولفه‌های مماسی E_y و H_z باید در مرزهای دو محیط مختلف، پیوسته باشند. طبق معادلات (۲.۵)، جزء میدان الکتریکی در امتداد محور z صفر است ($E_z = 0$) و چون میدان الکتریکی در صفحه‌ای است که بر محور z عمود است، این توزیع میدان الکترومغناطیسی را حالت الکتریکی عرضی (TE) می‌نامند. طبق معادلات (۲.۶) ، جزء میدان مغناطیسی در امتداد محور z صفر است ($H_z = 0$) و چون میدان مغناطیسی در صفحه‌ای است که بر محور z عمود است، این توزیع میدان الکترومغناطیسی را حالت مغناطیسی عرضی (TM) می‌نامند.

۲-۱-۲. معادلات پراکندگی برای حالت‌های TE و TM

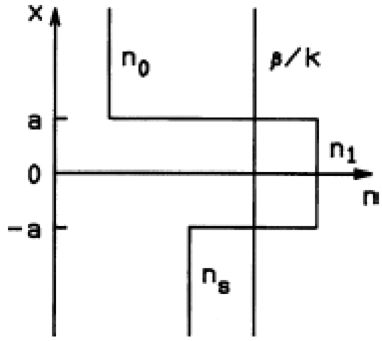
ثابت‌های انتشار و میدان‌های الکترومغناطیسی برای حالت‌های TE و TM را می‌توان با حل معادله (۲.۵) یا (۲.۶) بدست آورد. در اینجا روش استخراج برای محاسبه معادله پراکندگی و توزیع میدان الکترومغناطیسی آورده شده است. موج‌بر صفحه‌ای را با نمایه ضریب شکست یکنواخت در هسته در نظر می‌گیریم(شکل ۲-۲). با توجه به اینکه میدان‌های الکترومغناطیسی هدایت‌شونده در هسته، محدود می‌شوند و به صورت نمایی در روکش، فرو می‌افتند، توزیع میدان الکتریکی توسط معادله (۲.۷) بیان می‌شوند. همچنین k، σ و ξ اعداد موجی در امتداد محور x در نواحی هسته و روکش هستند و با معادله (۲.۸) بیان می‌شوند :

$$E_y = \begin{cases} A\cos(ka - \emptyset)\, e^{-\sigma(x-a)} & (x > a) \\ A\cos(kx - \emptyset)\, e^{-\sigma(x-a)} & (-a \le x \le a) \\ A\cos(ka + \emptyset)\, e^{-\xi(x-a)} & (x < -a) \end{cases} \quad (۲.۷)$$

$$\begin{cases} k = \sqrt{k^2 n_1{}^2 - \beta^2} \\ \sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_0{}^2} \\ \xi = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_s{}^2} \end{cases} \quad (۲.۸)$$

مولفه میدان الکتریکی E_y در معادله (۲.۷) در مرزهای رابط های هسته-روکش $(x = \pm a)$ پیوسته است. یک شرط مرزی دیگر وجود دارد که جزء میدان مغناطیسی H_Z باید در مرزها پیوسته باشد و با نادیده گرفتن اصطلاحات مستقل از x، شرط مرزی برای H_Z توسط شرط تداوم dE_y/dx به صورت زیر بیان می‌شود :

$$\frac{dE_y}{dx} = \begin{cases} -\sigma A\cos(ka-\emptyset)\, e^{-\sigma(x-a)} & (x > a) \\ -KA\cos(kx-\emptyset)\, e^{-\sigma(x-a)} & (-a \le x \le a) \\ \xi A\cos(ka+\emptyset)\, e^{-\xi(x-a)} & (x < -a) \end{cases} \qquad (۲.۹)$$



شکل ۲-۲. مشخصات ضریب شکست موجبر صفحه‌ای

از شرایطی که dE_y/dx در $x = \pm a$ پیوسته باشد، معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} kA\sin(ka+\emptyset) = \xi A\cos(ka+\emptyset) \\ \xi A\cos(ka+\emptyset) = kA\sin(ka+\emptyset) \end{cases} \qquad (۲.۱۰)$$

با حذف ثابت A، داریم :

$$\begin{cases} \tan(u+\emptyset) = \frac{\omega}{u} \\ \tan(u-\emptyset) = \frac{\omega'}{u} \end{cases} \qquad \begin{cases} u = ka \\ \omega = \xi a \\ \omega' = \sigma a \end{cases} \qquad (۲.۱۱)$$

از معادلات (۲.۱۱)، معادلات مقدار ویژه را به صورت زیر بدست می آوریم :

$$u = \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{u}\right) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\omega'}{u}\right) \qquad (m = 0,1,2,\ldots) \qquad (۲.۱۲)$$

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{u}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\omega'}{u}\right) \qquad (۲.۱۳)$$

اعداد موج عرضی u، ω و ω' مستقل نیستند و با استفاده از معادله‌های (۲.۸) و (۲.۱۱) به معادلات (۲.۱۴) مرتبط می‌شوند که در آن v فرکانس نرمالیز می‌باشد (رابطه‌ی ۱.۱۳) و γ معیاری برای عدم تقارن ضریب شکست روکش است. هنگامی که طول موج و پارامترهای هندسی موجبر مشخص شود، v و γ نیز مشخص می‌شوند :

$$\begin{cases} u^2 + \omega^2 = k^2 a^2 ({n_1}^2 - {n_s}^1) \equiv v^2 \\ \omega' = \sqrt{\gamma v^2 + \omega^2} \\ \gamma = \frac{{n_s}^2 - {n_0}^2}{{n_1}^2 - {n_s}^2} \end{cases} \tag{۲.۱۴}$$

در موجبر نامتقارن $(n_s > n_0)$، ضریب شکست بالاتر n_s به عنوان ضریب شکست روکش فلزی استفاده می‌شود که برای تعریف فرکانس v به کار می‌رود، چون شرط قطع، هنگامی تعیین می‌شود که ثابت انتشار k با این ضریب شکست، منطبق باشد (شکل ۲-۲). معادلات (۲.۱۲)، (۲.۱۳) و (۲.۱۴) معادلات پراکندگی یا معادلات ویژه مقدار برای مدهای TE_m هستند. هنگامی که فرکانس v و پارامتر نامتقارن γ تعیین شود، آن‌گاه می‌توان ثابت انتشار را از این معادلات تعیین کرد. بنابراین عدد موج عرضی باید یک عدد واقعی برای قسمت اصلی میدان نوری باشد که در ناحیه هسته، محدود می‌شود و شرط $n_1 \gg \beta/K \gg n_s$ باید برآورده شود. β/K یک مقدار بدون بعد است و یک ضریب شکست برای موج صفحه‌ای است. بنابراین به آن ضریب شکست می‌گویند $(n_e = \beta/K)$. هنگامی که $n_e < n_s$، میدان الکترومغناطیسی در روکش فلزی در جهت عرضی، نوسان می‌کند و به عنوان حالت تابش، پراکنده می‌شود. چون شرط $\beta = kn_s$، بیانگر شرایط بحرانی است که تحت آن، میدان قطع می‌شود و به حالت غیر هدایتی تبدیل می‌شود (حالت تابش)، به آن شرط قطع می‌گویند. باید یک پارامتر جدید معرفی شود:

$$b = \frac{{n_e}^2 - {n_s}^2}{{n_1}^2 - {n_s}^2} \tag{۲.۱۵}$$

پس شرایط برای مدهای هدایت‌شده برابر با $0 \ll b \ll 1$ خواهد بود و شرط برش برابر با $b = 0$ خواهد بود. با استفاده از فرکانس نرمالیزه v و ثابت انتشار b، می‌توان معادله پراکندگی (۲.۱۲) را بازنویسی کرد:

$$2v\sqrt{1-b} = m\pi + \tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{1-b}} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{b+\gamma}{1-b}} \tag{۲.۱۶}$$

همچنین معادله (۲.۸) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{cases} u = v\sqrt{1-b} \\ \omega = v\sqrt{b} \\ \omega' = v\sqrt{b+\gamma} \end{cases} \tag{۲.۱۷}$$

برای موج‌برهای متقارن با $n_0 = n_s$، داریم $\gamma = 0$ و معادلات پراکندگی (۲.۱۲) و (۲.۱۳) به معادله زیر کاهش می‌یابند:

$$u = \frac{m\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{u}\right) \qquad \boldsymbol{\phi} = \frac{m\pi}{2} \qquad \begin{cases} \omega = u\tan\left(u - \frac{m\pi}{2}\right) \\ v\sqrt{1-b} = \frac{m\pi}{2} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{1-b}} \end{cases} \tag{۲.۱۸}$$

اگر بتوان عدد موج عرضی $k\, n_1\, a \sin \boldsymbol{\phi}$ در معادله (۱.۱۱) را به صورت $u = ka = k\, n_1\, a \sin \boldsymbol{\phi}$ بیان کرد، آنگاه معادله (۱.۱۱) کاملاً با $\omega = u\tan(u - m\pi/2)$ منطبق است.

۳-۱-۲. محاسبه ثابت انتشار

رابطه بین u و w برای موجبر صفحه‌ای متقارن که در معادله (۲.۱۸) نشان داده شده است در شکل ۳-۲الف (به‌ازای ۴ =v و با شعاع ۴) رسم شده است. اعداد موج عرضی u و w باید معادله (۲.۱۵) را برای یک فرکانس نرمالیزه v برآورده کنند. راه‌حل‌های معادله پراکندگی به عنوان نقاط تقاطع در شکل ۳-۲ الف، آورده شده است و ثابت انتشار با استفاده از معادلات (۲.۸) و (۲.۱۱) بدست می‌آید. در شکل ۳-۲ الف، تنها یک نقطه عبور برای مورد $v < \pi/2$ وجود دارد. یعنی مد انتشار تنها حالتی است که ساختار موجبر و طول موج نور، نابرابری $v < \pi/2$ را برآورده می‌کنند و موجبر تک مد می‌باشد. پس مقدار $v_c = \pi/2$ شرط قطع نامیده می‌شود که در آن مدهای مرتبه بالاتر در موجبر صفحه‌ای متقارن، قطع می‌شوند. v_c فرکانس نرمالیزه نامیده می‌شود که از شرط قطع برای مد $m = 1$ بدست می‌آید:

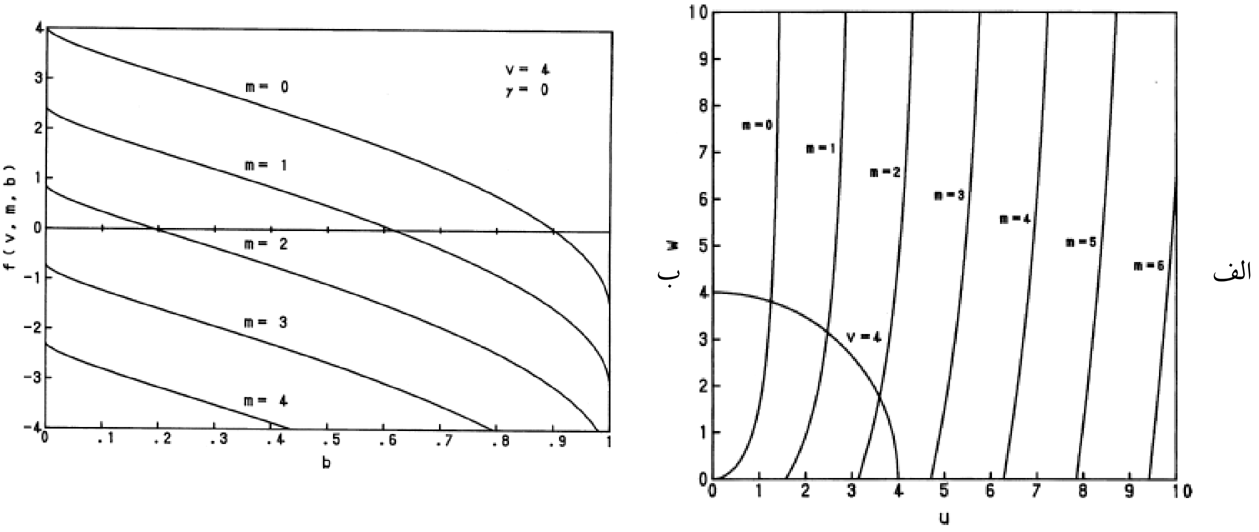
$$\begin{cases} b = \omega = 0 \\ u = v = \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (۲.۱۹)$$

مقدار شرط قطع برای مد TE با معادله (۲.۱۶) داده می‌شود و برای مد TM با معادله (۲.۳۱) داده می‌شود:

$$v_{c,\mathrm{TE}} = \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\gamma} \qquad (۲.۲۰) \qquad\qquad v_{c,\mathrm{TM}} = \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{n_1^2}{n_0^2}\sqrt{\gamma}\right) \qquad (۲.۲۱)$$

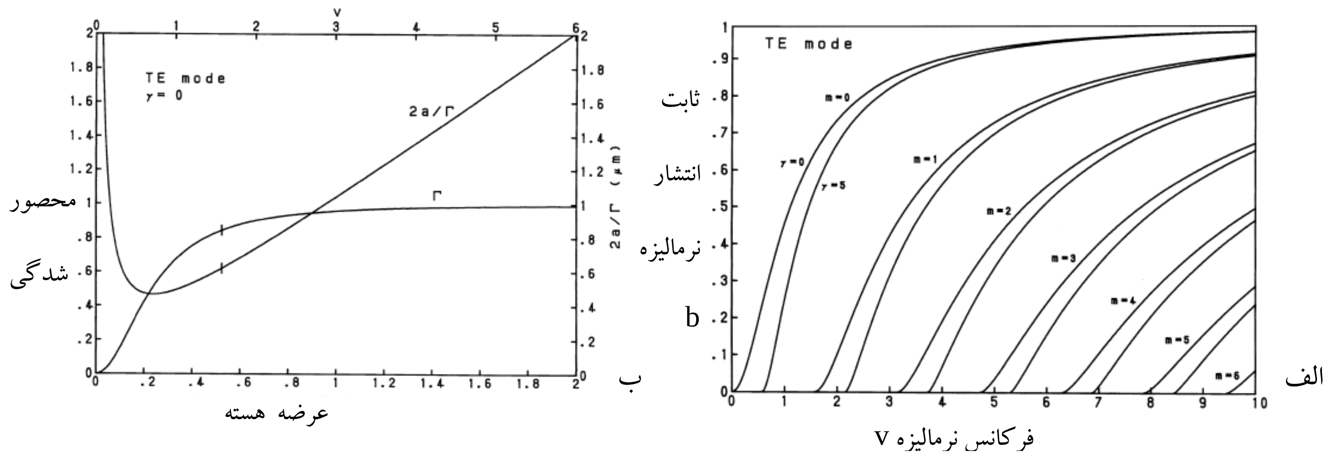
معادله پراکندگی به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$f(v,m,b) = v\sqrt{1-b} - \frac{m\pi}{2} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{1-b}} = 0 \qquad (۲.۲۲)$$



شکل ۳-۲. الف. رابطه u–w در موجبر صفحه‌ای. ب. نمودار $f(v,m,b)$ برای محاسبه مقدار ویژه.

شکل ۳-۲ ب، ویژه مقدار $f(v,m,b)$ را به‌ازای $v = 4$ محاسبه می‌کند. به ازای مقادیری از b که در آن $f = 0$ باشد، ثابت انتشار نرمالیزه b را برای هر فرکانس نرمالیزه v محاسبه می‌کند. شکل ۴-۲ الف، رابطه v–b را نشان می‌دهد که منحنی پراکندگی مد TE، نامیده می‌شود. شرط قطع برای این منحنی در مد TE، فقط برای مد $m = 0$ وجود دارد.



شکل ۴-۲. الف. منحنی‌های پراکندگی برای مدهای TE در موجبر صفحه‌ای. ب. ضریب محدودیت توان موجبر صفحه‌ای.

۴-۱-۲. توزیع میدان الکتریکی

معادلاتی که بخش قبل برای توزیع میدان الکتریکی بدست آمد، شامل ضریب ثابت A بود. این ضریب هنگامی تعیین می‌شود که توان موج نوری P مشخص شود. توان P با استفاده از معادله (۱.۴۴) بیان می‌شود :

$$P = \int_0^1 dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(E \times H^*).\, u_Z\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left(E_x H_y{}^* - E_y H_x{}^*\right) dx \qquad (۲.۲۳)$$

با استفاده از معادلات (۲.۵) و (۲.۳۱) برای مدهای TE داریم :

$$P = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} E_y\, dx \qquad (۲.۲۴)$$

با جایگزینی معادلات (۲.۷) و (۲.۲۱) ، میزان توان نوری در هسته، زیر لایه و پوشش بدست می‌آیند :

$$\begin{aligned} P_{core} &= \frac{\beta a A^2}{2\omega\mu_0}\left\{1 + \frac{\sin^2(u+\emptyset)}{2\omega} + \frac{\sin^2(u-\emptyset)}{2\omega'}\right\} && -a \le x \le a \\ P_{sub} &= \frac{\beta a A^2}{2\omega\mu_0}\frac{\cos^2(u+\emptyset)}{2\omega} && x \le -a \qquad (۲.۲۵) \\ P_{clad} &= \frac{\beta a A^2}{2\omega\mu_0}\frac{\cos^2(u-\emptyset)}{2\omega'} && x > a \end{aligned}$$

در نتیجه، توان کل برابر است با :

$$P = P_{core} + P_{sub} + P_{clad} = \frac{\beta a A}{2\omega\mu_0}\left\{1 + \frac{1}{2\omega} + \frac{1}{2\omega'}\right\} \qquad (۲.۲۶)$$

در اینجا ثابت A برابر است با :

$$A = \sqrt{\frac{2\omega\mu_0 P(1+\frac{1}{2\omega}+\frac{1}{2\omega'})}{\beta a A}} \qquad (۲.۲۷)$$

ضریب محدودیت توان در هسته برای محاسبه چگالی جریان آستانه J_{th} لیزرهای نیمه‌هادی، مهم است و با استفاده از معادلات (۲.۲۵) و (۲.۲۵) بدست می‌آید :

$$\Gamma = \frac{P_{core}}{P} = \frac{1+\frac{\sin^2(u+\emptyset)}{2\omega}+\frac{\sin^2(u-\emptyset)}{2\omega'}}{1+\frac{1}{2\omega}+\frac{1}{2\omega'}} \qquad (۲.۲۸)$$

ضریب محدودیت توان Γ نسبت به عرض هسته Γ /2a برای حالت اساسی در شکل ۴-۲ ب، نشان داده شده است. خطوط عمودی در شکل، عرض هسته تک حالت را بیان می‌کنند.

۵-۱-۲. معادلات پراکندگی مد TM

بر اساس معادلات(۲.۶)، معادلات پراکندگی مد TM همانند مد TE بدست می‌آید. ابتدا توزیع میدان مغناطیسی H_y را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$H_y = \begin{cases} A\cos(ka-\emptyset)\, e^{-\sigma(x-a)} & (x > a) \\ A\cos(kx-\emptyset) & (-a \le x \le a) \\ A\cos(ka+\emptyset)\, e^{-\xi(x-a)} & (x < -a) \end{cases} \qquad (۲.۲۹)$$

با اعمال شرایط مرزی H_y و E_z که باید در $x = \pm a$ پیوسته باشند، معادله پراکندگی زیر بدست می‌آید :

$$u = \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{{n_1}^2\omega}{{n_s}^2u}\right) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{{n_1}^2\omega'}{{n_0}^2u}\right) \qquad (۲.۳۰)$$

معادله (۲.۳۸) را با استفاده از فرکانس نرمالیزه v و ثابت انتشار b، به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم :

$$2v\sqrt{1-b} = m\pi + \tan^{-1}\left(\left(\frac{n_1}{n_s}\right)^2\sqrt{\frac{b}{1-b}}\right) + \tan^{-1}\left(\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2\sqrt{\frac{b+\gamma}{1-b}}\right) \qquad (۲.۳۱)$$

منحنی پراکندگی مد TM در موجبر با ضریب شکست $n_1 = 3.38$ و $n_s = n_0 = 3.17(\gamma = 0)$ مد TE مقایسه شده است (شکل ۵-۲ الف). مشخص است که در یک v یکسان، ثابت انتشار b برای مد TM کوچک‌تر از مد TE است و مد TE بیشتر از مد TM در هسته، محدود می‌شود. توان موج نوری برای مد TM از معادلات (۲.۶) و (۲.۲۳) بدست می‌آید:

$$P = \frac{\beta}{2\omega\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}|H_x|^2\, dx \qquad (۲.۳۲)$$

۲-۲. موجبرهای مستطیلی

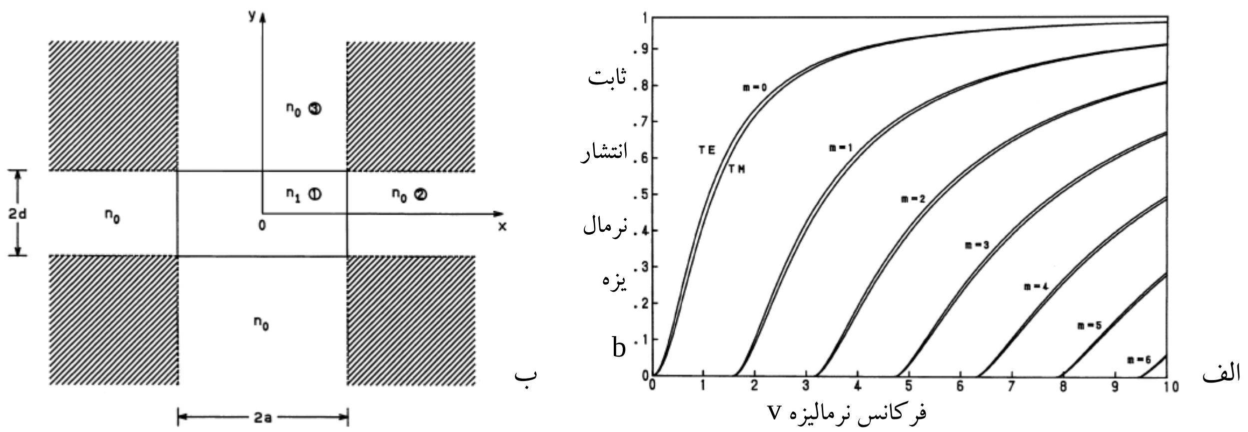
۱-۲-۲. معادلات پایه

برای معرفی موجبرهای سه‌بعدی از روش مارکاتلی استفاده می‌شود (شکل ۵-۲ ب) و از میدان‌های الکترومغناطیسی در قسمت‌های سایه‌زده صرف‌نظر می‌شود زیرا در مدهای اصلی موجبر، توزیع میدان الکترومغناطیسی به سرعت در ناحیه هسته، محصور می‌شود و هدایت می‌گردد اما در ناحیه بیرون هسته، به سرعت کاهش می‌یابد. بنابراین از شرایط مرزی در چهار ناحیه سایه‌زده، صرف‌نظر می‌کنیم. ابتدا مد الکترومغناطیسی را در نظر می‌گیریم که در آن E_x و H_y ، مولفه‌های اصلی میدان باشند. با توجه به روش مارکاتلی، $H_x = 0$ را در معادله (۲.۳) قرار می‌دهیم تا معادله موج و میدان الکترومغناطیسی بدست آید :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) H_y = 0 \qquad (۲.۳۳)$$

$$\begin{cases} H_X = 0 \\ E_x = \dfrac{\omega\mu_0}{\beta} H_y + \dfrac{1}{\omega\epsilon_0 n^2 \beta}\,\dfrac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \\ E_y = \dfrac{1}{\omega\epsilon_0 n^2 \beta}\,\dfrac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} \\ E_z = \dfrac{-j}{\omega\epsilon_0 n^2}\,\dfrac{\partial H_y}{\partial x} \\ H_z = \dfrac{-j}{\beta}\dfrac{\partial H_y}{\partial y} \end{cases} \qquad (۲.۳۴)$$

به این مدها، مد E^x_{pq} می‌گویند که اعداد صحیح p و q ، نشان‌دهنده مرتبه‌ی مد هستند.



شکل ۵-۲. الف. منحنی‌های پراکندگی مدهای TE و TM در موجبر صفحه‌ای. ب. موجبر مستطیلی سه بعدی.

دسته دیگر مدها با قرار دادن $H_x = 0$ را در معادله (۲.۴) و با در نظر گرفتن این‌که، E_x و H_y ، مولفه‌های اصلی میدان هستند، بدست می‌آیند :

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) H_x = 0 \qquad (۲.۳۵)$$

$$\begin{cases} H_y = 0 \\ E_x = \frac{\omega\mu_0}{\beta} H_x + \frac{1}{\omega\epsilon_0 n^2 \beta} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} \\ E_y = \frac{1}{\omega\epsilon_0 n^2 \beta} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} \\ E_z = \frac{-j}{\omega\epsilon_0 n^2} \frac{\partial H_x}{\partial x} \\ H_z = \frac{-j}{\beta} \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{cases} \qquad (۲.۳۶)$$

به این مد، مد E^y_{pq} می‌گویند.

۲-۲-۲. معادلات پراکندگی E^x_{pq} و E^y_{pq}

چون موجبر مستطیلی نسبت به محورهای x و y ، متقارن است، فقط مناطق ۱ تا ۳ را بررسی می‌شوند (شکل ۶-۲). حل معادله موج (۲.۳۵) در این سه ناحیه، به‌صورت زیر می‌باشد :

$$H_y = \begin{cases} A\cos(k_x x - \phi)\cos(k_y y - \psi) & \text{ناحیه یک} \\ A\cos(k_x a - \phi)\, e^{-\gamma_x (x-a)} \cos(k_y y - \psi) & \text{ناحیه دو} \\ A\cos(k_x x - \phi)\, e^{-\gamma_y (y-d)} \cos(k_y d - \psi) & \text{ناحیه سه} \end{cases} \qquad (۲.۳۷)$$

که در آن اعداد موج عرضی k_x ، k_y ، k_z ، γ_x و γ_y و فازهای اپتیکی ϕ و ψ از روابط زیر بدست می‌آیند :

$$\begin{cases} -{k_x}^2 - {k_y}^2 + k^2 {n_0}^2 - \beta^2 = 0 & \text{ناحیه یک} \\ -{\gamma_x}^2 - {k_y}^2 + k^2 {n_0}^2 - \beta^2 = 0 & \text{ناحیه دو} \\ -{k_x}^2 - {\gamma_y}^2 + k^2 {n_0}^2 - \beta^2 = 0 & \text{ناحیه سه} \end{cases} \qquad (۲.۳۸)$$

$$\begin{cases} \phi = (p-1)\frac{\pi}{2} & (p = 1,2,\dots) \\ \psi = (q-1)\frac{\pi}{2} & (q = 1,2,\dots) \end{cases} \qquad (۲.۳۹)$$

در اینجا اعداد صحیح p و q از ۱ شروع می‌شوند (روش مارکاتلی) اما در معادله (۲.۱۲) برای موجبرهای صفحه‌ای، مرتبه مد m از صفر شروع می‌شود. پایین‌ترین مد در موجبر صفحه‌ای، مد $TE_{m=0}$ است که میدان الکتریکی آن دارای یک پیک مرکزی است در حالی که در موجبرهای مستطیلی، مد $E^x_{p=1,q=1}$ یا $E^y_{p=1,q=1}$ دارای یک پیک مرکزی در میدان الکتریکی است (شکل۶-۲). بنابراین در روش مارکاتلی، اعداد صحیح p و q نشان‌دهنده پیک‌های میدان الکتریکی در راستای محور x و y هستند. وقتی شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم که میدان الکتریکی $E_z \propto (1/n^2)\, \partial H_y/\partial x$ در $x = a$ و میدان مغناطیسی $H \propto \partial H_y/\partial y$ در $y = d$ ، پیوسته باشد. بنابراین معادله پراکندگی زیر بدست می‌آید :

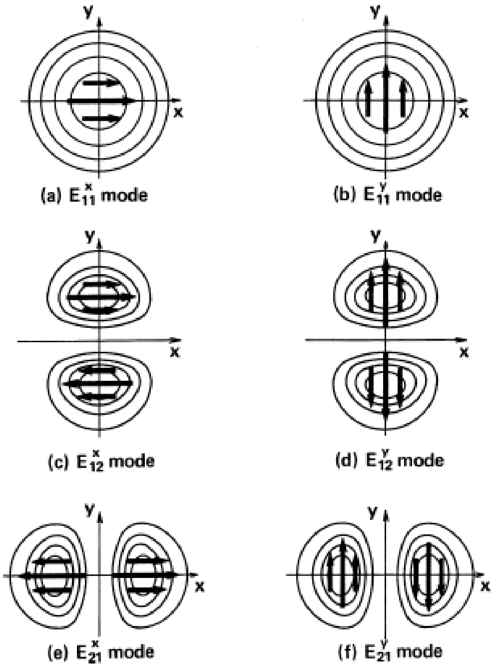
$$k_x a = (\mathrm{p}-1)\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{{n_1}^2\gamma_x}{{n_0}^2 k_x}\right)$$
$$k_y d = (\mathrm{q}-1)\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{\gamma_y}{k_y}\right) \tag{۲.۴۰}$$

اعداد موج عرضی k_x ، k_y ، γ_x و γ_y از رابطه (۲.۳۸) بدست می‌آیند :

$${\gamma_x}^2 = k^2({n_1}^2 - {n_0}^2) - {k_x}^2$$
$${\gamma_y}^2 = k^2({n_1}^2 - {n_0}^2) - {k_y}^2 \tag{۲.۴۱}$$

همچنین ثابت انتشار از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\beta^2 = k^2{n_1}^2 - ({k_x}^2 + {k_y}^2) \tag{۲.۴۲}$$



شکل ۶-۲. مد و توزیع میدان الکتریکی در روش مارکاتلی.

برای محاسبه معادلات پراکندگی مد E^y_{pq}، میدان مغناطیسی H_x را به صورت زیر بیان می‌کنیم :

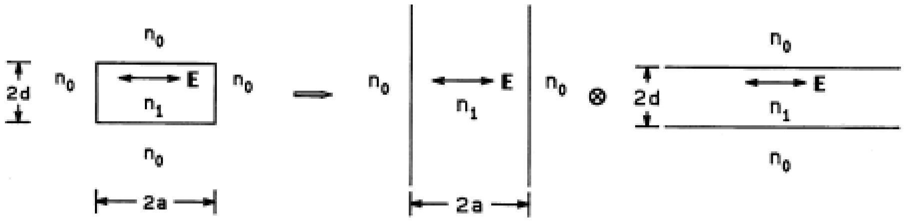
$$H_x = \begin{cases} A\cos(k_x x - \phi)\cos(k_y y - \psi) & \text{ناحیه یک} \\ A\cos(k_x a - \phi)\, e^{-\gamma_x(x-a)}\cos(k_y y - \psi) & \text{ناحیه دو} \\ A\cos(k_x x - \phi)\, e^{-\gamma_y(y-d)}\cos(k_y d - \psi) & \text{ناحیه سه} \end{cases} \tag{۲.۴۳}$$

شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم تا میدان الکتریکی $E_z \propto (1/n^2)\,\partial H_x/\partial y$ در $y = d$ و میدان مغناطیسی $H \propto \partial H_x/\partial x$ در $x = a$ ، پیوسته باشد. بنابراین معادله پراکندگی زیر را بدست می‌آوریم :

$$k_x a = (\mathrm{p}-1)\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{\gamma_x}{k_x}\right)$$
$$k_y d = (\mathrm{q}-1)\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{{n_1}^2\gamma_y}{{n_0}^2 k_y}\right) \qquad (۲.۴۴)$$

۳-۲-۲. روش کومر

در روش مارکاتلی، میدان‌های الکترومغناطیسی و شرایط مرزی در ناحیه سایه‌زده، به‌طور دقیق برآورده نمی‌شوند. یعنی مدهای هیبریدی موجبرهای مستطیلی با تفکیک به دو موجبر صفحه‌ای مستقل بدست می‌آیند (شکل ۷-۲). از روابط (۲.۴۰) برای بدست آوردن ثابت انتشار و مدهای TM و TE ، استفاده شد. کومر، روش مارکاتلی را برای محاسبه ثابت انتشار توسعه داد و ناحیه‌های سایه‌زده در روش مارکاتلی را تقریب زد.



شکل ۷-۲. موجبر مستطیلی و دو موجبر صفحه‌ای مستقل در روش مارکاتلی.

در روش کومر، توزیع ضریب شکست موجبر مستطیلی (برای مثال مد E^x_{pq}) به‌صورت زیر بیان می‌شود (شکل ۸-۲) :

$$n^2(x,y) = {N_x}^2(x) + {N_y}^2(y) + O({n_1}^2 - {n_0}^2) \qquad (۲.۴۵)$$

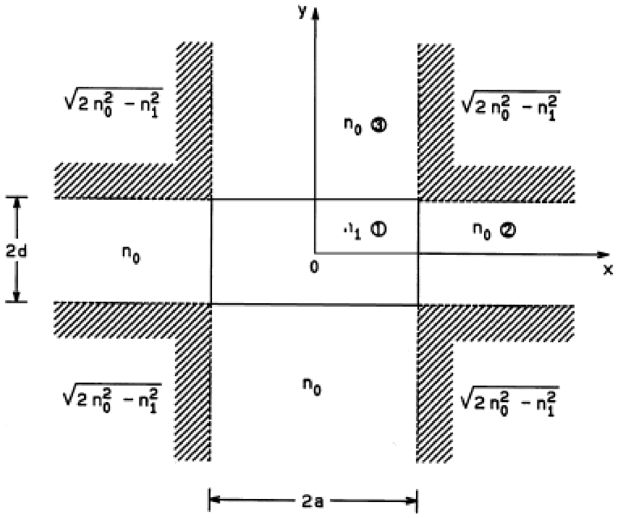
جایی که :

$${N_x}^2(x) = \begin{cases} \frac{{n_1}^2}{2} & |x| \le a \\ \frac{{n_0}^2 - {n_1}^2}{2} & |x| > a \end{cases} \qquad (۲.۴۶ \text{ الف})$$

$${N_y}^2(x) = \begin{cases} \frac{{n_1}^2}{2} & |y| \le d \\ \frac{{n_0}^2 - {n_1}^2}{2} & |y| > d \end{cases} \qquad (۲.۴۶ \text{ ب})$$

اختلاف ضریب شکست بین هسته و روکش، بسیار کوچک ($n_1 \approx n_0$) است، پس $O({n_1}^2 - {n_0}^2) \approx 0$ می‌باشد. همچنین ضریب شکست در ناحیه سایه‌زده برابر با $\sqrt{{n_0}^2 - {n_1}^2} \approx n_0$ می‌باشد. بنابراین توزیع ضریب شکست واقعی موجبر مستطیلی، به خوبی تقریب زده شد. البته هنوز تفاوت کوچکی بین ضریب شکست بدست آمده برای ناحیه سایه‌زده و مقدار واقعی آن وجود دارد. در این روش، تصحیح مد با استفاده از روش اختلال انجام می‌شود. ابتدا حل معادله موج را برای مد E^x_{pq} با استفاده از جداسازی متغیرها انجام می‌دهیم :

$$H_y(x,y) = H(x) + Y(y) \qquad (۲.۴۷)$$



شکل ۸-۲. پروفایل ضریب شکست در روش کومر.

با قرار دادن توزیع ضریب شکست‌های (۲.۴۶) و معادله (۲.۴۷) در معادله موج (۲.۳۳)، داریم :

$$\frac{d^2X}{dx^2}Y + X\frac{d^2Y}{dy^2} + \left[k^2\left({N_x}^2 + {N_y}^2\right) - \beta^2\right]XY = 0 \qquad (۲.۴۸)$$

با تقسیم معادله (۲.۴۸) بر XY، می‌توان آن را به دو عبارت تقسیم کرد که یکی وابسته به متغیر x و دیگری وابسته به متغیر y است :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + k^2{N_x}^2(x) + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + k^2{N_y}^2(y) = \beta^2 \qquad (۲.۴۹)$$

شرایط لازم برای آنکه معادله (۲.۴۹) به‌ازای مقادیر دلخواه x و y، برقرار باشند عبارتند از :

$$\begin{cases} \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + k^2{N_x}^2(x) = {\beta_x}^2 \\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + k^2{N_y}^2(y) = {\beta_y}^2 \end{cases} \qquad (۲.۵۰)$$

β_x و β_y ثابت‌هایی هستند که مستقل از x و y هستند. سپس دو معادله موج مستقل داریم :

$$\begin{cases} \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \left[k^2{N_x}^2(x) - {\beta_x}^2\right] X(x) \\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \left[k^2{N_y}^2(y) - {\beta_y}^2\right] Y(y) \end{cases} \qquad (۲.۵۱)$$

از معادلات می‌توان ثابت انتشار را بدست آورد :

$$\beta^2 = {\beta_y}^2 + {\beta_x}^2 \qquad (۲.۵۲)$$

پاسخ معادلات موج (۲.۵۰) و برابراست با :

$$X(x) = \begin{cases} A\cos(k_x x - \phi) & 0 \le x \le a \\ A\cos(k_x a - \phi)\ e^{-\gamma_x (x-a)} & x > a \end{cases}$$ (۲.۵۳ الف)

$$Y(y) = \begin{cases} B\cos\left(k_y y - \phi\right) & 0 \le y \le d \\ B\cos\left(k_y d - \phi\right)\ e^{-\gamma_y (y-d)} & y > d \end{cases}$$ (۲.۵۳ ب)

درمعادلات بالا، فقط ربع اول در نظر گرفته می‌شود چون موج‌بر مستطیلی دارای تقارن هندسی است. بنابراین اعداد موج عرضی k_x، k_y، γ_x و γ_y با β_x و β_y، مرتبط هستند :

$$\begin{cases} {\gamma_x}^2 = k^2({n_1}^2 - {n_0}^2) - {k_x}^2 \\ {\gamma_y}^2 = k^2({n_1}^2 - {n_0}^2) - {k_y}^2 \end{cases}$$ (۲.۵۴)

$$\begin{cases} {\beta_x}^2 = \frac{k^2 {n_1}^2}{2} - {k_x}^2 \\ {\beta_y}^2 = \frac{k^2 {n_1}^2}{2} - {k_y}^2 \end{cases}$$ (۲.۵۵)

و فازهای اپتیکی برابرند با :

$$\begin{cases} \phi = (p-1)\frac{\pi}{2} & (p = 1,2,\dots) \\ \psi = (q-1)\frac{\pi}{2} & (q = 1,2,\dots) \end{cases}$$ (۲.۵۶)

با اعمال شرایط مرزی، میدان الکتریکی باید در مرز x = a باید پیوسته باشد، یعنی : $E_z \propto \left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{\partial H_y}{\partial x} = \left(\frac{Y}{n^2}\right)\frac{dX}{dx}$ همچنین میدان مغناطیسی باید در مرز y = d باید پیوسته باشد، یعنی : $H_z \propto \frac{\partial H_y}{\partial y} = X\frac{dY}{dy}$. در نتیجه معادلات پراکندگی زیر را بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} k_x a = (p-1)\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{{n_1}^2 \gamma_x}{{n_0}^2 k_x}\right) \\ k_y d = (q-1)\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{\gamma_y}{k_y}\right) \end{cases}$$ (۲.۵۷)

ثابت انتشار برابر است با :

$$\beta^2 = k^2 {n_1}^2 - ({k_x}^2 + {k_y}^2)$$ (۲.۵۸)

تابع توزیع ضریب شکست موجبر مستطیلی را مجددا بازنویسی می کنیم :

$$n^2(x,y) = {N_x}^2(x) + {N_y}^2(y) + \delta.\eta(x,y)$$ (۲.۵۹)

که در آن δ یک کمیت کوچک است و $\delta.\eta(x,y)$ یک جمله اختلالی است :

$$\delta.\eta(x,y) = \begin{cases} (n_1{}^2 - n_0{}^2) & |x| > a \quad |y| > d \\ 0 & |x| \le a \quad |y| \le d \end{cases} \tag{۲.۶۰}$$

به طور کلی معادله موج به‌صورت زیر بیان می‌شود :

$$\nabla^2 f + (\mathrm{k}^2 n^2 - \beta^2) f = 0 \qquad (\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \tag{۲.۶۱}$$

حل میدان f و ویژه مقدار β^2 معادله (۲.۶۱) به‌صورت اختلال مرتبه اول، به‌صورت زیر بیان می‌شود :

$$\begin{cases} f = f_0 + \delta. f_1 \\ \beta = \beta_0 + \delta. \beta_1 \end{cases} \tag{۲.۶۲}$$

با قرار دادن معادلات (۲.۶۱) و (۲.۶۲) در (۲.۶۰) و جابجا کردن جملاتی که از یک مرتبه از δ هستند، معادلات زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \nabla^2 f_0 + [\mathrm{k}^2 (N_x{}^2 + N_y{}^2) - \beta_0{}^2] f_0 = 0 \\ \nabla^2 f_1 + [\mathrm{k}^2 (N_x{}^2 + N_y{}^2) - \beta_0{}^2] f_1 + \mathrm{k}^2 \eta f_0 - \beta_1{}^2 f_0 = 0 \end{cases} \tag{۲.۶۳}$$

با در نظر گرفتن انتگرال $\iint (\mathrm{Eq.}\,(2.72)^*. f_1 - \mathrm{Eq.}\,(2.73). f_0{}^*) dxdy$ در ناحیه سایه زده (ناحیهD) ، داریم :

$$\beta_1{}^2 \iint_D |f_0|^2 \, dx\, dy = \iint_D \left[f_0{}^* \nabla^2 f_1 - f_1 \nabla^2 f_0{}^* \right] dx\, dy + k^2 \iint_D \eta |f_0|^2 \, dx\, dy \tag{۲.۶۴}$$

سمت راست معادله بالا را با استفاده از قضیه گرین بدست می‌آوریم :

$$\iint_D \left[f_0{}^* \nabla^2 f_1 - f_1 \nabla^2 f_0{}^* \right] dx\, dy = \oint [f_0{}^* \frac{\partial f_1}{\partial n} - f_1 \frac{\partial f_0{}^*}{\partial n}]\, dl \tag{۲.۶۵}$$

که در آن $\frac{\partial}{\partial n}$ ، مشتق در جهت بردار نرمال بر محیط دربرگیرنده است و $\oint dl$ ، اختلال انتگرال‌گیری خطی در راستای محیط دربرگیرنده است. وقتی ناحیه D به بی نهایت میل می کند، انتگرال خطی معادله فوق، صفر می‌شود. بنابراین داریم :

$$\beta_1{}^2 = \frac{\mathrm{k}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,y) |f_0|^2 dx\, dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_0|^2 dx\, dy} \tag{۲.۶۶}$$

بنابراین مقدار ویژه‌ای که توسط اختلال مرتبه اول بدست می‌آید برابر است با :

$$\beta_1{}^2 = \beta_0{}^2 + \frac{\mathrm{k}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta.\eta(x,y) |X(x)Y(y)|^2 dx\, dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |X(x)Y(y)|^2 dx\, dy} =$$

$$(\mathrm{k}^2 \mathrm{n}_1{}^2 - \mathrm{k}_x{}^2 - \mathrm{k}_y{}^2) + \frac{\mathrm{k}^2 (\mathrm{n}_1{}^2 - \mathrm{n}_0{}^2) \int_a^{\infty} |X(x)|^2 dx \int_d^{\infty} |Y(y)|^2 dy}{\int_0^{\infty} |X(x)|^2 dx \int_0^{\infty} |Y(y)|^2 dy} =$$

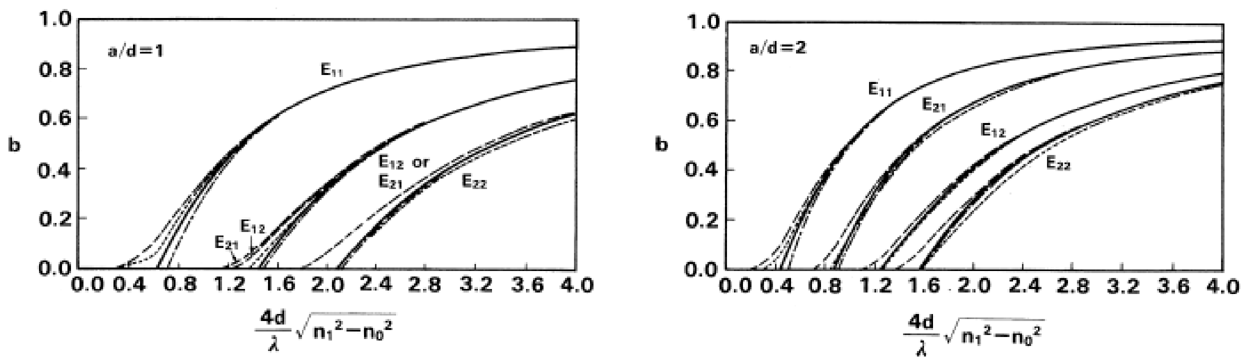
$$(\mathrm{k}^2 \mathrm{n}_1{}^2 - \mathrm{k}_x{}^2 - \mathrm{k}_y{}^2) + \frac{\mathrm{k}^2 (\mathrm{n}_1{}^2 - \mathrm{n}_0{}^2) \cos^2(\mathrm{k}_x a - \phi) \cos^2(\mathrm{k}_y d - \psi)}{(1 + \gamma_x a)(1 + \gamma_y d)}$$

$$(k^2 n_1^{\,2} - k_x^{\,2} - k_y^{\,2}) + \frac{k^2(n_1^{\,2}-n_0^{\,2})\cos^2(k_x a-\phi)\cos^2(k_y d-\psi)}{(1+\gamma_x a)(1+\gamma_y d)} \qquad (۲.۶۷)$$

در جمله دوم معادله فوق فرض کردیم که ما $n_0^2/n_1^2 \approx 1$ و ثابت انتشار نرمالیزه از به‌صورت زیر بدست می‌آید :

$$b = 1 - \frac{k_x^{\,2}+k_y^{\,2}}{k^2(n_1^{\,2}-n_0^{\,2})} + \frac{\cos^2(k_x a-\phi)\cos^2(k_y d-\psi)}{(1+\gamma_x a)(1+\gamma_y d)} \qquad (۲.۶۸)$$

شکل ۹-۲ منحنی‌های پراکندگی را برای موجبرهای مستطیلی با نسبت ابعاد هسته $a/d = 1$ و $a/d = 2$ نشان می‌دهد که با استفاده از روش‌های تحلیل مختلف برای معادلات موج اسکالر محاسبه می‌شوند. دقت روش تطبیق نقطه‌ای، بیشتر از روش‌های دیگر است و مطابق شکل دقت روش کومار بیشتر از روش مارکاتلی است. روش ضریب شکست موثر، تقریبا شبیه روش مارکاتلی است اما دارای تخمین بهتری در حل مسئله می‌باشد و دارای کاربردهای زیادی در انواع موجبرها است.



شکل ۹-۲. مقایسه منحنی‌های پراکندگی محاسبه‌شده با روش‌های تحلیلی مختلف.—— روش مارکاتلی؛——روش کومر،...... روش تطبیق نقطه‌ای؛——— روش ضریب شکست مؤثر.

۴-۲-۲. روش ضریب شکست موثر

پیدا کردن مدهای موجبر Ridge، با استفاده از روش مارکاتلی یا روش کومار، سخت است، زیرا ساختار موجبر بسیار پیچیده است (شکل ۱۰-۲). برای تحلیل موجبرهای Ridge از روش‌های عددی (مانند روش اجزا محدود و روش تفاضل محدود) استفاده می‌شود. روش ضریب شکست موثر یک روش کاربردی برای حل تقریبی این موجبرها است. در ادامه، روش ضریب شکست موثر را برای مد E_{pq}^x حل می کنیم :

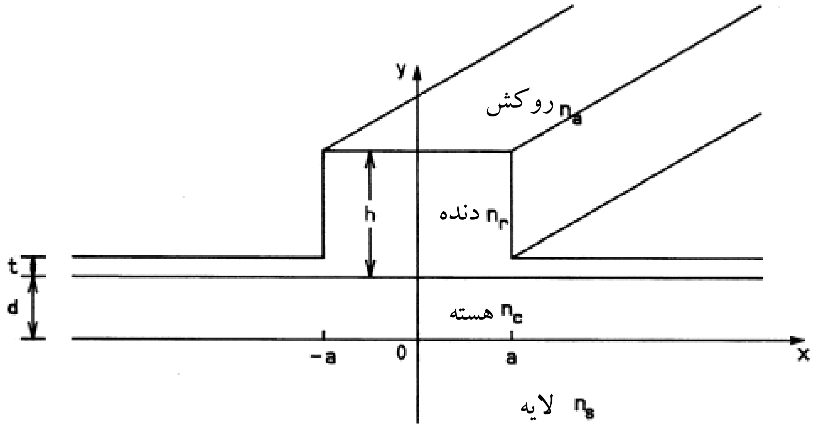
$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + [k^2 n^2(x,y) - \beta_x^{\,2}]H_y = 0 \qquad (۲.۶۹)$$

فرض اساسی روش ضریب شکست موثر این است که می‌توان میدان الکترومغناطیسی را با جداسازی متغیرها به‌صورت تابعی از x و y بیان کرد :

$$H_y(x,y) = X(x)Y(y) \qquad (۲.۷۰)$$

اگر فرض جداسازی متغیرها دقیق نباشد، به دلیل ساختار موجبر یا طول موج نور، دقت این روش بسیار ضعیف خواهد شد. با جایگزینی معادله (۲.۷۰) در (۲.۶۹) و تقسیم آن بر XY، داریم :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\left[\mathrm{k}^2n^2(x,y)-\beta_x{}^2\right]=\ 0 \qquad (۲.۷۱)$$



شکل ۱۰-۲. موجبر Ridge.

به طرفین معادله بالا، مقدار $\mathrm{k}^2\mathrm{n}_{\mathrm{eff}}{}^2(\mathrm{x})$ را اضافه و کم می‌کنیم و این معادله را به دو معادله مستقل، تفکیک می‌کنیم :

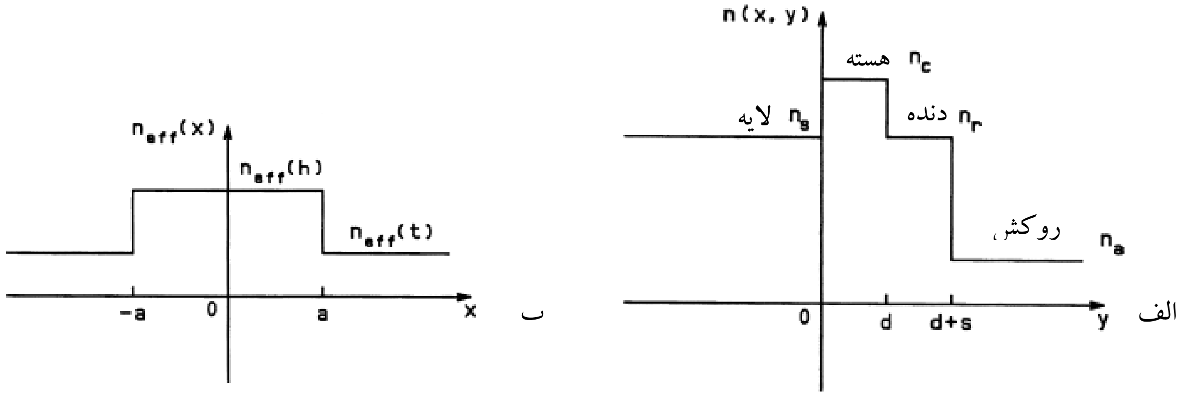
$$\begin{cases}\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\left[\mathrm{k}^2n^2(x,y)-\mathrm{k}^2\mathrm{n}_{eff}{}^2(x)\right]=\ 0\\ \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\left[\mathrm{k}^2\mathrm{n}_{eff}{}^2(x)-\beta_x{}^2\right]=\ 0\end{cases} \qquad (۲.۷۲)$$

$\mathrm{n}_{\mathrm{eff}}$ (x) توزیع ضریب شکست موثر است. ابتدا باید توزیع ضریب شکست موثر $\mathrm{n}_{\mathrm{eff}}$ (x) تعیین شود. مطابق شکل ۱۱-۲، در تغییرات واقعی پروفایل ضریب شکست n(x,y)، $\mathrm{n_r = n_s}$ و s ارتفاع است که به x، وابسته است:

$$\mathrm{s}=\begin{cases}\mathrm{h} & 0\le|x|\le a\\ \mathrm{t} & |\mathrm{x}|>a\end{cases} \qquad (۲.۷۳)$$

پس شرط مرزی $H_z \propto \partial H_y/\partial y$ باید در d+s و d و $y = 0$، پیوسته باشد، بنابراین شرط تداوم $\partial Y/\partial y$ را در مرزهای فوق داریم. معادله پراکندگی برای موجبر صفحه‌ای چهار لایه (مطابق شکل ۱۱-۲ الف) به‌صورت زیر است :

$$\sin(\mathrm{kd}\text{-}2\phi)=\sin(\mathrm{kd})\mathrm{e}^{-2(\sigma s+\psi)} \qquad \begin{cases}\phi\ =\ \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{k}\right)\\ \psi\ =\ \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)\\ \mathrm{k}\ =\ k\sqrt{\mathrm{n}_c{}^2-\mathrm{n}_{eff}{}^2}\\ \sigma\ =\ k\sqrt{\mathrm{n}_{eff}{}^2-\mathrm{n}_c{}^2}\\ \gamma\ =\ k\sqrt{\mathrm{n}_{eff}{}^2-\mathrm{n}_c{}^2}\end{cases} \qquad (۲.۷۴)$$



شکل ۱۱-۲. الف. تغییرات واقعی پروفایل ضریب شکست $n(x,y)$. ب. توزیع پروفایل ضریب شکست $n_{eff}(x)$.

حل معادله (۲.۷۴) با مقدار $s = h$ ، مقدار $n_{eff}(h)$ را برای ناحیه $0 \le |x| \le a$ بیان می‌کند و حل معادله (۲.۷۴) با مقدار $s = t$ ، مقدار $n_{eff}(t)$ را برای ناحیه $|x| > a$ بیان می‌کند (شکل ۱۱-۲ ب). همچنین شرایط مرزی $E_z \propto (1/n^2)$ $\partial H_y / \partial x$ باید در $x = \pm a$ پیوسته باشند. بنابراین تحت شرایط فوق، معادله پراکندگی به‌صورت زیر بدست می‌آید :

$$u \tan(u) = \frac{n_{eff}^2\,(h)}{n_{eff}^2\,(t)} \qquad \begin{cases} u = ka\sqrt{n_{eff}^2\,(h) - (\frac{\beta}{k})^2} \\ w = ka\sqrt{(\frac{\beta}{k})^2 - n_{eff}^2\,(t)} \end{cases} \qquad (۲.۷۵)$$

با روشی مشابه، معادله پراکندگی مدهای E_{pq}^{x} نیز بدست می‌آید :

$$\sin(kd-2\phi) = \sin(kd)e^{-2(\sigma s+\psi)} \qquad \begin{cases} u \tan(u) = w \\ \phi = \tan^{-1}(\frac{\sigma n_c^2}{k n_s^2}) \\ \psi = \tan^{-1}(\frac{\sigma n_c^2}{\gamma n_s^2}) \end{cases} \qquad (۲.۷۶)$$

۳-۲. میدان‌های تابشی از موجبرها

میدان تابشی از یک موجبر نوری در فضای آزاد، به‌صورت واگرا منتشر می‌شود. میدان تشعشعی با میدان موجود در موجبر متفاوت است. بنابراین باید مشخصات میدان تابشی را مورد بررسی قرار داد.

۱-۳-۲. نواحی فرنلی و فرانهوفری

اگر انتهای یک موجبر که در $z = 0$ است و میدان الکترومغناطیسی که با ضریب شکست n در فضای آزاد منتشر می‌شود را درنظر بگیریم، آن‌گاه توزیع میدان الکتریکی در انتهای موجبر برابر با $g(x_0,y_0,0)$ و در مکان z برابر با $f(x,y,z)$ است (شکل ۱۲-۲). با استفاده از فرمول پراکندگی داریم :

$$f(x,y,z) = \frac{jkn}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_0,y_0,0)\,\frac{1}{e}\,e^{-jknr}\,dx_0 dy_0 \qquad (۲.۷۷)$$

که در آن $k = 2\pi/\lambda$ بردار موج و $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}$ می‌باشد. اگر صفحه مشاهده z در مقایسه با $|x-x_0|$ و $|y-y_0|$ ، خیلی بزرگ باشد آن‌گاه داریم :

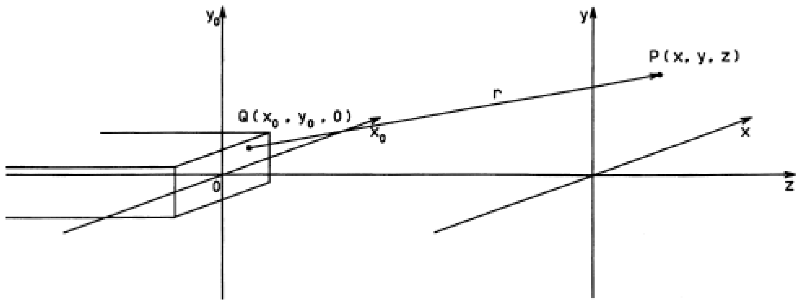
$$r = z\,[1+\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{z^2}]^{1/2} = z+\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}+\cdots =$$

$$z+\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx_0+yy_0}{z}+\frac{{x_0}^2+{y_0}^2}{2z}+\cdots \tag{۲.۷۸}$$

اگر جملات بالاتر از مرتبه ۴ را حذف کنیم، در این حالت میدان‌های تابشی به عنوان تقریب ناحیه دور یا ناحیه فرانهوفری نامیده می‌شوند. اگر z خیلی بزرگ نباشد و تا جمله مرتبه ۴ را درنظربگیریم، در این حالت میدان‌های تابشی به عنوان تقریب ناحیه نزدیک یا میدان فرانهوفری نامیده می‌شوند. همچنین اگر z خیلی به موجبر نزدیک باشد، تقریب فرنلی نامعتبر می‌شود. پس جمله چهارم تعیین کننده است. اگر تقریب فرانهوفر نسبت به r در معادله(۲.۷۷) بکار گرفته شود، داریم :

$$f(x,y,z) = \frac{jkn}{2\pi}\exp\left\{jkn[z+\frac{x^2+y^2}{2z}]\right\}\times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_0,y_0,0)\exp\left\{jkn[\frac{(xx_0+yy_0)}{z}]\right\}dx_0dy_0 \tag{۲.۷۹}$$



شکل ۱۲-۲. سیستم محور برای انتهای موجبر $(z = 0)$ و صفحه z.

۲-۳-۲. طرح تابش موج گاوسین

توزیع میدان الکتریکی در انتهای موجبر با روش finite element بدست می‌آید. در ابتدا این توزیع میدان را با پروفایل گاوسی زیر نشان می‌دهیم :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x_0,y_0,0) = A\exp\left\{-[\frac{{x_0}^2}{{w_1}^2}+\frac{{y_0}^2}{{w_2}^2}]\right\} \tag{۲.۸۰}$$

در اینجا w_1 و w_2 فاصله‌هایی هستند که میدان $|g|$ به $1/e$ مقدار ماکزیمم خود می‌رسد. با قرار دادن (۲.۸۰) در (۲.۷۹) داریم :

$$f(x,y,z) = \frac{jkn}{2\pi z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_0,y_0,0)\exp\left\{jkn\left[\frac{(xx_0+yy_0)}{z}\right]\right\}dx_0dy_0 =$$

$$\frac{jkn}{2\pi z}Ae^{-jknz}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{{x_0}^2}{{w_1}^2}-\frac{jkn}{2n}(x-x_0)^2\right\}dx_0\times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{{y_0}^2}{{w_2}^2}-\frac{jkn}{2n}(y-y_0)^2\right\} dy_0 \qquad (۲.۸۱)$$

در اینجا از r برای تقریب فرنلی استفاده شده است. در ابتدا محاسبات را در راستای x انجام می‌دهیم. پارامتر p به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$p=\frac{1}{{w_1}^2}+\frac{\pi n}{\lambda z} \qquad (۲.۸۲)$$

همچنین انتگرال نسبت به x_0 برابر است با :

$$\exp\left\{-\frac{j\pi n}{\lambda z}x^2-\frac{\pi^2 n^2 x^2}{p\lambda^2 z^2}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-p\left(x_0-\frac{j\pi n x}{p\lambda z}\right)^2\right\}dx_0=\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,exp\left\{-\frac{j\pi n}{\lambda z}x^2-\frac{\pi^2 n^2 x^2}{p\lambda^2 z^2}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,exp\left\{-\frac{j\pi n x^2}{\lambda}\frac{\left(z-\frac{j\pi n {\omega_1}^2}{\lambda}\right)}{\left(z^2+\frac{\pi^2 n^2 {\omega_1}^4}{\lambda^2}\right)}\right\} \qquad (۲.۸۳)$$

در اینجا متغیرهای جدیدی معرفی می‌شوند :

$$\begin{cases} W_1(z)=\omega_1\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{\pi n {\omega_1}^2}\right)^2} \\ R_1(z)=z\left[1+\left(\frac{\pi n {\omega_1}^2}{\lambda z}\right)^2\right] \\ \Theta_1(z)=\tan^{-1}\left(\frac{\lambda z}{\pi n {\omega_1}^2}\right) \end{cases} \qquad (۲.۸۴)$$

در نتیجه پارامتر p به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود :

$$p=\frac{\pi n W_1(z)}{\lambda z \omega_1}e^{-j\Theta_1} \qquad (۲.۸۵)$$

با جایگزینی (۲.۸۵) در (۲.۸۳) داریم :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{{x_0}^2}{{\omega_1}^2}-\frac{kn}{2z}(x-x_0)^2\right\}dx_0=\sqrt{\frac{\lambda\omega_1 z}{jnW_1(z)}}\,exp\left\{-\left[\frac{1}{{W_1}^2(z)}+\frac{jkn}{2R_1(z)}\right]x^2+j\frac{\Theta_1(z)}{2}\right\} \qquad (۲.۸۶)$$

به‌طور مشابه انتگرال نسبت به y_0 برابر است با :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{{y_0}^2}{{\omega_1}^2}-\frac{kn}{2z}(y-y_0)^2\right\}dx_0=\sqrt{\frac{\lambda\omega_2 z}{jnW_2(z)}}\,exp\left\{-\left[\frac{1}{{W_2}^2(z)}+\frac{jkn}{2R_2(z)}\right]y^2+j\frac{\Theta_2(z)}{2}\right\} \qquad (۲.۸۷)$$

متغیرهای آن نیز به‌صورت زیر می‌باشند :

$$\begin{cases} W_2(z) = \omega_2\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{\pi n {\omega_2}^2}\right)^2} \\ R_2(z) = z\left[1+\left(\frac{\pi n {\omega_2}^2}{\lambda z}\right)^2\right] \\ \Theta_2(z) = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda z}{\pi n {\omega_2}^2}\right) \end{cases} \tag{۲.۸۸}$$

با جایگزینی معادلات (۲.۸۶) و (۲.۸۷) در (۲.۸۱) ، طرح تابش موجبر میدان مستطیلی بدست می آید :

$$f(x,y,z) = \sqrt{\frac{\omega_1\omega_2}{w_1 w_2}}A = \frac{jkn}{2\pi z}A\exp\left\{-\left[\frac{x^2}{{w_1}^2}+\frac{y^2}{{w_2}^2}\right]\right\} - jkn\left[\frac{x^2}{2R_1}+\frac{y^2}{2R_2}+z\right] + j\frac{(\Theta_1+\Theta_2)}{2} \tag{۲.۸۹}$$

$2R_1(z)$ و $2R_2(z)$ ، شعاع انحنا موج هستند و اگر p از سطح مقطع موج‌بر خیلی دور باشد، آن‌گاه ناحیه فرانهوفری به‌صورت زیر می‌باشد :

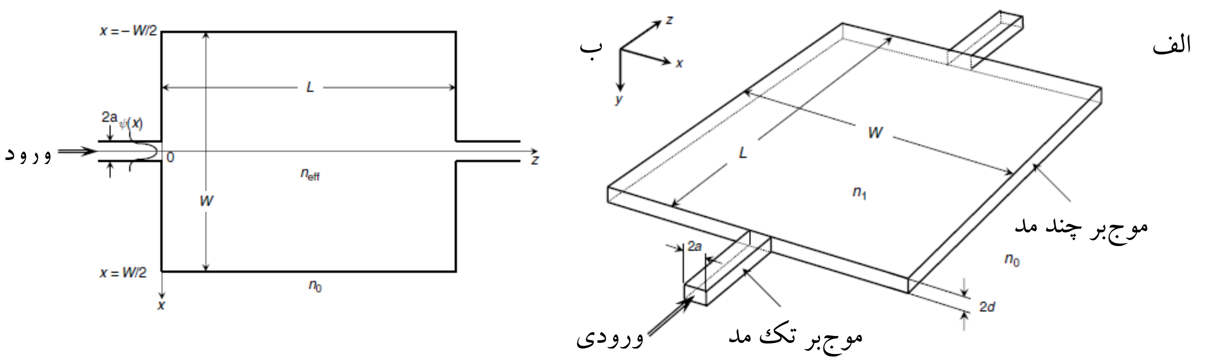
$$\begin{cases} W_1(z) \cong \frac{\lambda}{\pi n\omega_1} \\ W_2(z) \cong \frac{\lambda}{\pi n\omega_2} \\ R_1(z) \cong R_2(z) \cong z \end{cases} \tag{۲.۹۰}$$

همچنین زاویه واگرایی تقریب فرانهوفری به‌صورت زیر می‌باشد :

$$\begin{cases} \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{W_1(z)}{z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda}{\pi n\omega_1}\right) \\ \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{W_2(z)}{z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda}{\pi n\omega_2}\right) \end{cases} \tag{۲.۹۱}$$

۲-۴. دستگاه تداخل گر چند مدی

این ابزار فوتونیکی از ابزارهای بسیار مهم فوتونیک و بر پایه اثر خود- تصویر است و می‌تواند به‌صورت تابعی تقسیم‌کننده یا جمع‌آوری‌کننده، عمل کند و دارای تعداد بسیار زیادی مد باشد (شکل ۱۳-۲ ب).



شکل ۱۳-۲. الف. پیکربندی شماتیک موجبر تداخل چند مدی (MMI). ب. ساختار دو بعدی موجبر تداخل چند مدی (MMI).

یک موجبر تک مدی با عرض 2a و ضخامت 2d به تداخل‌گر چند مدی، متصل می‌شود (شکل ۱۳-۲ ب). ضریب شکست موجبر و تداخل‌گر برابر با n_1 می‌باشد و ضریب شکست روکش، n_0 می‌باشد. با استفاده از روش ضریب شکست موثر، ساختار سه بعدی به دو بعدی کاهش می‌یابد. ضریب شکست موثر n_{eff} با حل معادله ویژه مقداری مدها در راستای y بدست می‌آید. میدان الکتریکی مدهای TE_m برای تداخل‌گر چند مدی، برابر است با :

$$\mathrm{E_y}^m(x,y) = \begin{cases} A_m \cos\left(u_m + \frac{m\pi}{2}\right)\exp[\frac{2w_m}{w}\left(x+\frac{W}{2}\right) - j\beta_m z] & (x < -\frac{W}{2}) \\ A_m \cos\left(\frac{2u_m}{W} - \frac{m\pi}{2}\right)\exp(-j\beta_m z) & (x \le -\frac{W}{2}) \\ A_m \cos\left(u_m - \frac{m\pi}{2}\right)\exp[-\frac{2w_m}{w}\left(x-\frac{W}{2}\right) - j\beta_m z] & (x > -\frac{W}{2}) \end{cases} \tag{۲.۹۲}$$

w_m و u_m، اعداد موج عرضی مرتبه m ام در هسته و روکش می‌باشند، W عرض تداخل‌گر چند مدی است و ν فرکانس نرمالیزه می‌باشد :

$$w_m = u_m \tan(u_m - \frac{m\pi}{2}) \tag{۲.۹۳}$$

$$u_m{}^2 + w_m{}^2 = k^2(\frac{W}{2})^2(n_{eff}{}^2 - n_0{}^2) \equiv \nu^2 \tag{۲.۹۴}$$

ثابت انتشار

$$\beta_m = \sqrt{k^2 n_{eff}{}^2 - (\frac{2u_m}{W})^2} \cong k n_{eff} - \frac{(m+1)^2\lambda}{4n_{eff}w^2}\pi \tag{۲.۹۵}$$

میدان الکتریکی نهایی در ناحیه MMI برابر است با :

$$\Psi(x,y,z) = \sum_{m=0}^{M} \mathrm{E_y}^m(x,y) =$$

$$e^{-jkn_{eff}z}\sum_{m=0}^{M} A_m \cos[\frac{(m+1)\pi}{W}x - \frac{m\pi}{2}] \times = \exp[j\,\frac{(m+1)^2\pi\lambda}{4n_{eff}w^2}] \tag{۲.۹۶}$$

M ماکزیمم تعداد مدهای ممکن است و مقدار ثابت A_m برابر است با :

$$A_m = \frac{2}{W}\int_{-W/2}^{W/2}\psi(x)\cos[\frac{(m+1)\pi}{W}x - \frac{m\pi}{2}]dx \tag{۲.۹۷}$$

اگر موجبر تک مد به‌طور متقارن به مرکز تداخل‌گر چند مدی، متصل شود آن‌گاه حالت مدهای تداخل‌گر، متقارن می‌شود و تعداد مدها به‌صورت یک عدد زوج بیان می‌شود ($m = 2l$). در نقطه $n_{eff}w^2/\lambda$ ، فاز جمله (۲.۹۶) به رابطه زیر تبدیل می‌شود :

$$\exp[j\,\frac{(m+1)^2\pi\lambda}{4n_{eff}w^2}] = \exp[jl(l+1)\pi + j\frac{\pi}{4}] = \exp(j\frac{\pi}{4}) \tag{۲.۹۸}$$

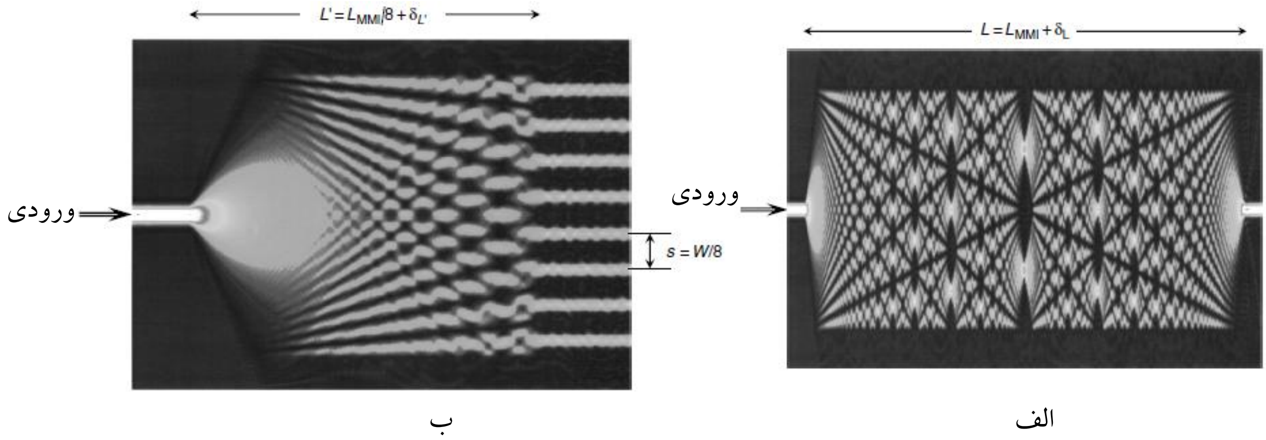
پس طول مشخصه MMI، برابر با $L_{MMI} = n_{eff}w^2/\lambda$ است و پروفایل میدان الکتریکی در این طول برابر است با :

$$\Psi(x, L_{MMI}) = e^{-jkn_{eff}L_{MMI} + j\frac{\pi}{4}}\sum_{m=0}^{M} A_m \cos[\frac{(m+1)\pi}{W}x - \frac{m\pi}{2}] \tag{۲.۹۹}$$

توزیع میدان در انتهای L_{MMI} ، همانند توزیع میدان موجبر ورودی است :

$$\Psi(x, L_{MMI}) = \psi(x)e^{-jkn_{eff}L_{MMI}+j\frac{\pi}{4}} \qquad (۲.۱۰۰)$$

یعنی میدان الکتریکی ورودی $\psi(x)$ در فاصله L_{MMI} با یک تغییر فازی، مجددا تولید می‌شود (شکل ۱۴-۲ الف) و در $z = L_{MMI}/N$ ، نور ورودی به N تصویر تقسیم می‌شود (شکل ۱۴-۲ ب).



شکل ۱۴-۲. الف. تشکیل تصویر برای نور ورودی در مرکز موجبر MMI. ب. ویژگی‌های تقسیم نور موجبر MMI با طول LMMI/8 .

فصل سوم : فیبر نوری

فیبر نوری یکی از ابزارهای مهم برای ارتباطات مسافت طولانی و حجم بالا است. مهم‌ترین ویژگی بارز فیبر نوری، افت بسیار کم آن است. هم‌زمان با این افت پایین، پراکندگی بسیار کم برای انتقال اطلاعات نیاز است. از بین رفتن سیگنال‌ها در فیبر نوری مرتبط با ساختار هدایت آن است.

۳-۱. معادلات اساسی

میدان‌های الکترومغناطیسی در فیبرهای نوری به صورت مختصات استوانه‌ای بیان می‌شوند :

$$\begin{cases}\widetilde{\mathrm{E}} = \mathrm{E}(\mathrm{r},\vartheta)\, \mathrm{e}^{j(\omega \mathrm{t}-\beta \mathrm{z})} \\ \widetilde{\mathrm{H}} = \mathrm{H}(\mathrm{r},\vartheta)\, \mathrm{e}^{j(\omega \mathrm{t}-\beta \mathrm{z})}\end{cases} \qquad (۳.۱)$$

با جایگزینی معادلات (۳.۱) در (۱.۲۸) ، داریم :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + [\mathrm{k}^2 \mathrm{n}(\mathrm{r},\theta)^2 - \beta^2]E_z = 0 \\ \dfrac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 H_z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + [\mathrm{k}^2 \mathrm{n}(\mathrm{r},\theta)^2 - \beta^2]\mathrm{H}_z = 0\end{cases} \qquad (۳.۲)$$

در فیبرهای متقارن محوری، توزیع ضریب‌شکست وابسته به θ نیست و فقط با $\mathrm{n(r)}$ بیان می‌شود. میدان‌های الکترومغناطیسی عرضی مربوط به E_z و H_z می‌باشند :

$$\begin{cases}\mathrm{E_r} = -\dfrac{j}{[\mathrm{k}^2\mathrm{n}(\mathrm{r},\theta)^2-\beta^2]}\left(\beta\dfrac{\partial E_z}{\partial r} + \dfrac{\omega\mu_0}{r}\dfrac{\partial H_z}{\partial \theta}\right) \\ \mathrm{E}_\theta = -\dfrac{j}{[\mathrm{k}^2\mathrm{n}(\mathrm{r},\theta)^2-\beta^2]}\left(\dfrac{\beta}{r}\dfrac{\partial E_z}{\partial \theta} - \omega\mu_0\dfrac{\partial H_z}{\partial r}\right) \\ \mathrm{H}_r = -\dfrac{j}{[\mathrm{k}^2\mathrm{n}(\mathrm{r},\theta)^2-\beta^2]}\left(\beta\dfrac{\partial \mathrm{H_z}}{\partial r} - \dfrac{\omega\varepsilon_0 n(r)^2}{r}\dfrac{\partial E_z}{\partial \theta}\right) \\ \mathrm{H}_\theta = -\dfrac{j}{[\mathrm{k}^2\mathrm{n}(\mathrm{r},\theta)^2-\beta^2]}\left(\dfrac{\beta}{r}\dfrac{\partial \mathrm{H_z}}{\partial \theta} + \omega\varepsilon_0 n(r)^2\dfrac{\partial E_z}{\partial r}\right)\end{cases} \qquad (۳.۳)$$

وابستگی سمتی میدان‌های الکترومغناطیسی با $sin(n\theta + \psi)$ یا $cos(n\theta + \psi)$ بیان می‌شود و مدهای TE و TM در فیبر برابرند با :

$$\begin{cases}TE: \quad E_z = 0 \\ TM: \quad H_z = 0\end{cases} \qquad (۳.۴)$$

و برای مدهای ترکیبی، $E_z \neq 0, H_z \neq 0$ می‌باشد.

۳-۲. نظریه موجی فیبرهای با ضریب شکست پله‌ای

۳-۲-۱. مدهای TE

وقتی $\mathrm{E_z} = 0$ را در معادلات (۳.۲) و (۳.۳) قرار دهیم، مدهای TE بدست می‌آیند :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 H_z}{\partial r} + [\mathrm{k}^2\mathrm{n}(\mathrm{r},\theta)^2 - \beta^2 - \frac{n^2}{r^2}]\mathrm{H}_z = 0 \qquad (۳.۵)$$

$$\begin{cases} E_r = -\frac{j\omega\mu_0}{[k^2 n(r,\theta)^2-\beta^2]}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta} \\ E_\theta = \frac{j\omega\mu_0}{[k^2 n(r,\theta)^2-\beta^2]}\frac{\partial H_z}{\partial r} \\ H_r = -\frac{j\beta}{[k^2 n(r,\theta)^2-\beta^2]}\frac{\partial H_z}{\partial r} \\ H_\theta = -\frac{j\beta}{[k^2 n(r,\theta)^2-\beta^2]}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta} \end{cases} \quad (۳.۶)$$

توزیع میدان مغناطیسی در هسته و روکش به صورت زیر بیان می‌شود :

$$H_z = \binom{g(r)}{h(r)}\cos(n\theta+\psi) \qquad \begin{matrix}(0\le r\le a)\\(r>a)\end{matrix} \quad (۳.۷)$$

با استفاده از شرایط مرزی مولفه‌های مماسی میدان‌های H_z و H_θ که باید در مرز هسته و پوشش $r = a$ پیوسته باشند، دو شرط زیر بدست می‌آیند :

$$g(a) = h(a) \Longrightarrow {H_z}^{core} = {H_z}^{cladding} \quad (۳.۸)$$

$$\frac{j\beta}{[k^2 n(a)^2-\beta^2]}\frac{n}{a}g(a)sin(n\theta+\psi) = \frac{j\beta}{[k^2 {n_0}^2-\beta^2]}\frac{n}{a}h(a)sin(n\theta+\psi) \quad (۳.۹)$$

چون در فیبر ضریب شکست پله‌ای در مرز هسته $n(a) = n_1$ برابر با ضریب شکست روکش n_0 نیست، پس عدد صحیح n باید برای معادله (۳.۹) ، صفر باشد تا شرایط مرزی به‌ازای هر θ دلخواه، برقرار باشد. پس $E_r = H_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} = 0$ می‌باشد. با درنظر گرفتن شرط $n = 0$ ، معادلات برای مدهای TE بصورت زیر می‌باشد :

$$\frac{d^2H_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH_z}{dr} + [k^2 n(r)^2 - \beta^2]H_z = 0 \quad (۳.۱۰)$$

$$\begin{cases} E_\theta = \frac{j\omega\mu_0}{[k^2 n(r)^2-\beta^2]}\frac{dH_z}{dr} \\ H_r = -\frac{j\beta}{[k^2 n(r)^2-\beta^2]}\frac{dH_z}{dr} \\ E_r = H_\theta = 0 \end{cases} \quad (۳.۱۱)$$

اعداد موج در هسته و غلاف برابر است با :

$$k = \sqrt{k^2{n_1}^2 - \beta^2} \qquad و \qquad \sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2{n_0}^2} \quad (۳.۱۲)$$

معادله موج در داخل هسته ($H_z = g(r)$) و غلاف ($H_z = h(r)$) به ترتیب برابر است با :

$$\begin{cases} \frac{d^2g}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dg}{dr} + k^2 g = 0 \quad (0\le r\le a) \\ \frac{d^2h}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dh}{dr} + \sigma^2 h = 0 \quad (r>a) \end{cases} \quad (۳.۱۳)$$

تابع بسل مرتبه صفر J_0 (kr) و تابع نیومن مرتبه صفر N_0 (kr)، راه حل‌های معادله (۳.۱۳) هستند. اما از آنجا که N_0 (kr) در r = 0 بی نهایت واگرا است، پس J_0 (kr) راه حل مناسب برای هسته است. تابع بسل مرتبه صفر I_0 (σr) و تابع نیومن مرتبه صفر K_0 (σr)، راه حل‌های معادله (۳.۱۳) هستند. اما چون I_0 (σr) در r = 0، بی نهایت واگرا است، پس K_0 (σr) راه حل مناسب برای غلاف است. بنابراین برای مدهای TE داریم :

$$H_z = \begin{cases} AJ_0\,(kr) & (0 \le r \le a) \\ Bk_0\,(\sigma r) & (r > a) \end{cases} \qquad (۳.۱۴)$$

شرایط مرزی برای H_z و E_θ در r = 0 باید برقرار باشد :

$$\begin{cases} AJ_0\,(ka) = Bk_0\,(\sigma a) \\ \frac{A}{k} J_0{}'\,(ka) = -\frac{B}{\sigma} k_0{}'\,(\sigma a) \end{cases} \qquad (۳.۱۵)$$

با استفاده از اعداد موج عرضی نرمالیزه داریم :

$$u = ka = a\sqrt{k^2 {n_1}^2 - \beta^2} \qquad \text{و} \qquad \omega = \sigma a = a\sqrt{\beta^2 - k^2 {n_0}^2} \qquad (۳.۱۶)$$

معادلات (۳.۱۵) ترکیب می‌شوند و به معادله پراکندگی زیر تقلیل می‌یابد :

$$\frac{J_0{}'\,(u)}{uJ_0\,(u)} = -\frac{k_0{}'\,(\omega)}{wk_0\,(\omega)} \qquad (۳.۱۷)$$

با کمک توابع بسل $J_0{}'\,(u) = -J_1(u)$ و $k_0{}'\,(\omega) = -k_1\,(\omega)$، معادله (۳.۱۷) برابر می‌شود با :

$$\frac{J_1(u)}{uJ_0\,(u)} = -\frac{k_1\,(\omega)}{wk_0\,(\omega)} \qquad (۳.۱۸)$$

با استفاده از اعداد موج عرضی نرمالیزه u و ω، به صورت زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند :

$$u^2 + \omega^2 = k^2({n_1}^2 - {n_0}^2)a^2 = v^2 \qquad (۳.۱۹)$$

میدان‌های الکترومغناطیسی مد TE ($E_r = E_z = H_\theta = 0$) با جایگزینی معادلات (۳.۱۴) و (۳.۱۵) در (۳.۱۰)، بدست می‌آیند :

الف. میدان‌ها در هسته ($0 \le r \le \alpha$):

$$\begin{cases} E_\theta = -j\omega\mu_0 \frac{a}{u} AJ\left(\frac{u}{a} r\right) \\ H_r = j\beta \frac{a}{u} AJ\left(\frac{u}{a} r\right) \\ H_z = AJ_0\left(\frac{u}{a} r\right) \end{cases} \qquad (۳.۲۰)$$

ب. میدان‌ها در روکش ($r > \alpha$):

$$\begin{cases} E_\theta = j\omega\mu_0 \frac{a}{w}\frac{J_0(u)}{k_0(u)} Ak_1\left(\frac{\omega}{a}r\right) \\ H_r = -j\beta \frac{a}{w}\frac{J_0(u)}{k_0(u)} Ak_1\left(\frac{\omega}{a}r\right) \\ H_z = \frac{J_0(u)}{k_0(u)} Ak_0\left(\frac{\omega}{a}r\right) \end{cases} \tag{۳.۲۱}$$

ثابت **A** از توان **P** حمل‌شده توسط مد تعیین می‌شود.

۲-۲-۳. مدهای TM

وقتی $H_z = 0$ را در معادلات (۳.۲) و (۳.۲) قرار دهیم، مدهای TM بدست می‌آیند :

$$\frac{d^2E_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH_z}{dr} + [k^2n(r)^2 - \beta^2]E_z = 0 \tag{۳.۲۳}$$

$$\begin{cases} E_r = \frac{-j\beta}{[k^2n(r)^2-\beta^2]}\frac{dE_z}{dr} \\ H_\theta = -\frac{-j\omega\varepsilon_0 n^2}{[k^2n(r)^2-\beta^2]}\frac{dE_z}{dr} \\ E_\theta = H_r = 0 \end{cases} \tag{۳.۲۴}$$

حل معادله (۳.۲۳) توسط تابع بسل مرتبه صفر، بیان می‌شود :

$$E_z = \begin{cases} AJ_0\,(kr) & (0 \le r \le a) \\ Bk_0\,(\sigma r) & (r > a) \end{cases} \tag{۳.۲۵}$$

با اعمال شرایط مرزی برای E_z و H_z که باید مرز هسته- پوشش در $r = a$ پیوسته باشند، داریم :

$$\frac{J_0{}'\,(u)}{uJ_0\,(u)} = -(\frac{n_0}{n_1})^2\frac{k_0{}'\,(\omega)}{wk_0\,(\omega)} \tag{۳.۲۶}$$

با استفاده از رابطه بازگشتی توابع بسل می‌توان معادله (۳.۲۶) را برای معادله پراکندگی مد TM بازنویسی کرد :

$$\frac{J_1\,(u)}{uJ_0\,(u)} = -(\frac{n_0}{n_1})^2\frac{k_1\,(\omega)}{wk_0\,(\omega)} \tag{۳.۲۷}$$

میدان‌های الکترومغناطیسی برای مد TM به صورت زیر خلاصه می‌شوند :

$$E_\theta = H_r = H_z \tag{۳.۲۸}$$

الف. میدان‌ها در هسته $(0 \le r \le \alpha)$:

$$\begin{cases} E_r = j\beta\frac{a}{u}AJ_1\left(\frac{u}{a}r\right) \\ E_z = AJ_0\left(\frac{u}{a}r\right) \\ H_\theta = j\omega\varepsilon_0 {n_1}^2 AJ_1\left(\frac{u}{a}r\right) \end{cases} \tag{۳.۲۹}$$

ب. میدان‌ها در روکش $(r > \alpha)$:

$$\begin{cases} E_\theta = -j\beta \frac{a}{\omega}\frac{J_0(u)}{k_0(\omega)} A k_1\left(\frac{\omega}{a}r\right) \\ H_r = \frac{J_0(u)}{k_0(\omega)} A k_0\left(\frac{\omega}{a}r\right) \\ H_z = -j\omega\varepsilon_0 {n_0}^2 \frac{a}{\omega}\frac{J_0(u)}{k_0(\omega)} A k_1\left(\frac{\omega}{a}r\right) \end{cases} \tag{۳.۳۰}$$

۳-۲-۳. مدهای هیبریدی

در مدهای هیبریدی، میدان‌های الکترومغناطیسی E_z و H_z صفر نیستند و در مرز $r = a$ پیوسته هستند. بنابراین راه حل‌های معادلات (۳.۲) با ضرب تابع بسل مرتبه n در $\cos(n\theta + \psi)$ بدست می‌آیند و راه حل‌های معادلات (۳.۳) با ضرب تابع بسل مرتبه n در $\sin(n\theta + \psi)$ بدست می‌آیند. بنابراین مولفه‌های z میدان الکترومغناطیسی (۳.۳۱) به صورت زیر بیان می‌شوند :

$$E_z = \begin{cases} A J_n\left(\frac{u}{a}r\right)\cos(n\theta + \psi) & (0 \le r \le a) \\ A\frac{J_n(u)}{k_n(\omega)} k_n\left(\frac{\omega}{a}r\right)\cos(n\theta + \psi) & (r > a) \end{cases} \tag{۳.۳۱}$$

$$H_z = \begin{cases} C J_n\left(\frac{u}{a}r\right)\sin(n\theta + \psi) & (0 \le r \le a) \\ C\frac{J_n(u)}{k_n(\omega)} k_n\left(\frac{\omega}{a}r\right)\sin(n\theta + \psi) & (r > a) \end{cases} \tag{۳.۳۲}$$

مولفه‌های عرضی با جایگزینی معادلات (۳.۳۱) و (۳.۳۲) در (۳.۳) بدست می‌آیند :

آ. ناحیه هسته $(0 \le r \le a)$

$$\begin{cases} E_r = -\frac{ja^2}{u^2}\left(A\beta\frac{u}{a}J'_n\left(\frac{u}{a}r\right) + C\omega\mu_0\frac{n}{r}J_n\left(\frac{u}{a}r\right)\right)\cos(n\theta + \psi) \\ E_\theta = -\frac{ja^2}{u^2}\left(-A\beta\frac{n}{r}J_n\left(\frac{u}{a}r\right) - C\omega\mu_0\frac{n}{a}J'_n\left(\frac{u}{a}r\right)\right)\sin(n\theta + \psi) \\ H_r = -\frac{ja^2}{u^2}\left(A\omega\varepsilon_0 {n_1}^2\frac{n}{r}J_n\left(\frac{u}{a}r\right) + C\beta\frac{u}{a}J'_n\left(\frac{u}{a}r\right)\right)\sin(n\theta + \psi) \\ H_\theta = -\frac{ja^2}{u^2}\left(A\omega\varepsilon_0 {n_1}^2\frac{n}{r}J_n\left(\frac{u}{a}r\right) + C\beta\frac{n}{r}J_n\left(\frac{u}{a}r\right)\right)\cos(n\theta + \psi) \end{cases} \tag{۳.۳۳}$$

ب. ناحیه پوشش $(r > a)$

$$\begin{cases} E_r = \frac{ja^2}{\omega^2}\left(A\beta\frac{\omega}{a}k'_n\left(\frac{\omega}{a}r\right) + C\omega\mu_0\frac{n}{r}k_n\left(\frac{\omega}{a}r\right)\right)\frac{J_n(u)}{k_n(\omega)}\cos(n\theta + \psi) \\ E_\theta = \frac{ja^2}{\omega^2}\left(-A\beta\frac{n}{r}k_n\left(\frac{\omega}{a}r\right) - C\omega\mu_0\frac{\omega}{a}k'_n\left(\frac{\omega}{a}r\right)\right)\frac{J_n(u)}{k_n(\omega)}\sin(n\theta + \psi) \\ H_r = \frac{ja^2}{\omega^2}\left(A\omega\varepsilon_0 {n_0}^2\frac{n}{r}k_n\left(\frac{\omega}{a}r\right) + C\beta\frac{\omega}{a}k'_n\left(\frac{\omega}{a}r\right)\right)\frac{J_n(u)}{k_n(\omega)}\sin(n\theta + \psi) \\ H_\theta = \frac{ja^2}{\omega^2}\left(A\omega\varepsilon_0 {n_0}^2\frac{\omega}{a}k'_n\left(\frac{\omega}{a}r\right) + C\beta\frac{n}{r}k_n\left(\frac{\omega}{a}r\right)\right)\frac{J_n(u)}{k_n(\omega)}\cos(n\theta + \psi) \end{cases} \tag{۳.۳۴}$$

E_θ و H_θ باید در مرز $r = a$ ، پیوسته باشند. بنابراین داریم :

$$A\beta(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{\omega^2}) = -C\omega\mu_0[\frac{J'_n(u)}{J_n(u)}+\frac{k'_n(\omega)}{k_n(\omega)}] \tag{۳.۳۵}$$

$$A\omega\varepsilon_0[n_1{}^2\frac{J'_n(u)}{uJ_n(u)}+n_0{}^2\frac{k'_n(\omega)}{\omega k_n(\omega)}] = -C\beta\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{\omega^2}\right)n \tag{۳.۳۶}$$

با ترکیب روابط (۳.۳۵) و (۳.۳۶) ، به معادله پراکندگی می‌رسیم و با حل آنها به ثابت انتشار مدهای هیبریدی می‌رسیم :

$$\left[\frac{J'_n(u)}{J_n(u)}+\frac{k'_n(\omega)}{k_n(\omega)}\right]\left[n_1{}^2\frac{J'_n(u)}{uJ_n(u)}+n_0{}^2\frac{k'_n(\omega)}{\omega k_n(\omega)}\right] = \frac{\beta^2}{k^2}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{\omega^2}\right)n^2 = n^2\left(\frac{n_1{}^2}{u^2}+\frac{n_0{}^2}{\omega^2}\right) \rightarrow$$

$$\left[\frac{J'_n(u)}{J_n(u)}+\frac{k'_n(\omega)}{k_n(\omega)}\right]\left[\frac{J'_n(u)}{uJ_n(u)}+(\frac{n_0}{n_1})^2\frac{k'_n(\omega)}{\omega k_n(\omega)}\right] = n^2\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{\omega^2}\right)[\frac{1}{u^2}+(\frac{n_0}{n_1})^2\frac{1}{\omega^2}] \tag{۳.۳۷}$$

ثابت C در (۳.۳۳) (۳.۳۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$C = -A\frac{\beta}{\omega\mu_0}s \qquad (s = \frac{n\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{\omega^2}\right)}{\frac{J'_n(u)}{uJ_n(u)}+\frac{k'_n(\omega)}{\omega k_n(\omega)}}) \tag{۳.۳۸}$$

روابط بازگشتی زیر را به توابع بسل اعمال می‌کنیم :

$$J'_n(z) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(z)-J_{n+1}(z)] \tag{۳.۳۹ الف}$$

$$\frac{n}{z}J_n(z) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(z)+J_{n+1}(z)] \tag{۳.۳۹ ب}$$

$$K'_n(z) = \frac{1}{2}[K_{n-1}(z)-K_{n+1}(z)] \tag{۳.۳۹ پ}$$

$$\frac{n}{z}K_n(z) = \frac{1}{2}[K_{n-1}(z)-K_{n+1}(z)] \tag{۳.۳۹ ت}$$

بنابراین روابط (۳.۳۳) و (۳.۳۴) ، به‌صورت زیر خواهند بود :

آ. ناحیه هسته $(0 \le r \le a)$:

$$\begin{cases} E_r = -jA\beta\frac{a}{u}\left[\frac{(1-s)}{2}J_{n-1}\left(\frac{u}{a}r\right)-\frac{(1+s)}{2}J_{n+1}\left(\frac{u}{a}r\right)\right]\cos(n\theta+\psi) \\ E_\theta = jA\beta\frac{a}{u}\left[\frac{(1-s)}{2}J_{n-1}\left(\frac{u}{a}r\right)-\frac{(1+s)}{2}J_{n+1}\left(\frac{u}{a}r\right)\right]\sin(n\theta+\psi) \\ E_z = AJ_n\left(\frac{u}{a}r\right)\cos(n\theta+\psi) \\ H_r = -jA\omega\varepsilon_0 n_1{}^2\frac{a}{u}\left[\frac{(1-s)}{2}J_{n-1}\left(\frac{u}{a}r\right)-\frac{(1+s)}{2}J_{n+1}\left(\frac{u}{a}r\right)\right]\sin(n\theta+\psi) \\ H_\theta = -jA\omega\varepsilon_0 n_1{}^2\frac{a}{u}\left[\frac{(1-s)}{2}J_{n-1}\left(\frac{u}{a}r\right)-\frac{(1+s)}{2}J_{n+1}\left(\frac{u}{a}r\right)\right]\cos(n\theta+\psi) \\ H_z = -A\frac{\beta}{\omega\mu_0}sJ_n\left(\frac{u}{a}r\right)\sin(n\theta+\psi) \end{cases} \tag{۳.۴۰}$$

ب. ناحیه پوشش $(r > a)$:

$$\begin{cases} E_r = -jA\beta\frac{aJ_n(u)}{\omega K_n(\omega)}\left[\frac{(1-s)}{2}K_{n-1}\left(\frac{\omega}{a}r\right) - \frac{(1+s)}{2}K_{n+1}\left(\frac{\omega}{a}r\right)\right]\cos(n\theta + \psi) \\ E_\theta = jA\beta\frac{aJ_n(u)}{\omega K_n(\omega)}\left[\frac{(1-s)}{2}K_{n-1}\left(\frac{\omega}{a}r\right) - \frac{(1+s)}{2}K_{n+1}\left(\frac{\omega}{a}r\right)\right]\sin(n\theta + \psi) \\ E_z = A\frac{J_n(u)}{K_n(\omega)}K_n\left(\frac{\omega}{a}r\right)\cos(n\theta + \psi) \\ H_r = -jA\omega\varepsilon_0 n_0^2\frac{aJ_n(u)}{\omega K_n(\omega)}\left[\frac{(1-s_0)}{2}K_{n-1}\left(\frac{\omega}{a}r\right) - \frac{(1+s_0)}{2}K_{n+1}\left(\frac{\omega}{a}r\right)\right]\sin(n\theta + \psi) \\ H_\theta = -jA\omega\varepsilon_0 n_0^2\frac{aJ_n(u)}{\omega K_n(\omega)}\left[\frac{(1-s_0)}{2}K_{n-1}\left(\frac{\omega}{a}r\right) - \frac{(1+s_0)}{2}K_{n+1}\left(\frac{\omega}{a}r\right)\right]\cos(n\theta + \psi) \\ H_z = -A\frac{\beta}{\omega\mu_0}s\frac{J_n(u)}{K_n(\omega)}K_n\left(\frac{\omega}{a}r\right)\sin(n\theta + \psi) \end{cases} \quad (۳.۴۱)$$

که در اینجا $s_1 = \frac{\beta^2}{k^2 n_1^2}s$ و $s_0 = \frac{\beta^2}{k^2 n_0^2}s$ می‌باشد.

۳-۳. توان اپتیکی حمل‌شده توسط هر مد

میانگین زمانی مولفه z بردار پوئین‌تینگ در واحد سطح از رابطه (۳.۴۱) به صورت زیر بیان می‌شود :

$$S_z = \frac{1}{2}(E \times H^*).u_z = \frac{1}{2}(E_r \times H_\theta{}^* - E_\theta \times H_r{}^*) \quad (۳.۴۲)$$

u_z بردار یکه در جهت z است. توان حمل شده توسط فیبر نوری برابر است با :

$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} S_z r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}(E_r \times H_\theta{}^* - E_\theta \times H_r{}^*)r\,dr\,d\theta \quad (۳.۴۳)$$

۱-۳-۳. مدهای TE

توان انتقال معادلات ۲۱-۳ و ۲۲-۳، برابر است با :

$$P_{\text{هسته}} = \pi\omega\mu_0\beta|A|^2\frac{a^2}{u^2}\int_0^a J_1{}^2\left(\frac{u}{a}r\right)r\,dr =$$

$$\pi\omega\mu_0\beta|A|^2\frac{a^4}{u^4}\left[J_1{}^2(u) - J_0(u)J_2(u)\right] \quad (۳.۴۴)$$

$$P_{\text{روکش}} = \pi\omega\mu_0\beta|A|^2\frac{a^2 J_0{}^2(u)}{\omega^2 K_0{}^2(\omega)}\int_0^{\infty} K_1{}^2\left(\frac{\omega}{a}r\right)r\,dr =$$

$$\pi\omega\mu_0\beta|A|^2\frac{a^4 J_0{}^2(u)}{u^4 K_0{}^2(\omega)}\left[K_0(\omega)K_2(\omega) - K_1{}^2(\omega)\right] \quad (۳.۴۵)$$

که در آن از فرمول انتگرالی توابع بسل استفاده شده است :

$$\int_0^a J_m{}^2\left(\frac{u}{a}r\right)rdr = \begin{cases} \frac{a^2}{2}\left[J_0{}^2(u) + J_1{}^2(u)\right] & (m = 0) \\ \frac{a^2}{2}\left[J_m{}^2(u) - J_{m-1}(u)\,J_{m+1}(u)\right] & (m \geq 1) \end{cases} \quad (۳.۴۶)$$

$$\int_0^a K_m^{\,2}\left(\frac{\omega}{a}\mathrm{r}\right) rdr = \begin{cases} \frac{a^2}{2}\left[K_1^{\,2}(\omega) - K_0^{\,2}(\omega)\right] & (\mathrm{m}=0) \\ \frac{a^2}{2}\left[K_{m-1}(\omega)\, K_{m+1}(\omega) - K_m^{\,2}\right] & (\mathrm{m}\geq 1) \end{cases} \tag{۳.۴۷}$$

بنابراین رابطه (۳.۴۴) را به صورت زیر می‌نویسم :

$$\left[\mathrm{J}_1^{\,2}(u) - \mathrm{J}_0(u)\mathrm{J}_2(u)\right] = \mathrm{J}_1^{\,2}(u)\left[1 - \frac{\mathrm{J}_0(u)\mathrm{J}_2(u)}{\mathrm{J}_1^{\,2}(u)}\right] \tag{۳.۴۸}$$

با جای‌گذاری معادله (۳.۱۸) در (۳.۳۹ ب) ، داریم :

$$\mathrm{J}_2(u) = \frac{2\,\mathrm{J}_1(u)}{\mathrm{u}} - \mathrm{J}_0(u) = \frac{2\mathrm{K}_1(\omega)\,\mathrm{J}_0(u)}{\omega\,\mathrm{K}_0(\omega)} - \mathrm{J}_0(u) = -\frac{\mathrm{K}_2(\omega)}{\mathrm{K}_0(\omega)}\mathrm{J}_0(u) \tag{۳.۴۹}$$

با قرار دادن معادله (۳.۴۹) در (۳.۴۸) ، داریم :

$$\left[\mathrm{J}_1^{\,2}(u) - \mathrm{J}_0(u)\mathrm{J}_2(u)\right] = \mathrm{J}_1^{\,2}(u)\left[1 + \frac{\omega^2}{\mathrm{u}^2}\frac{\mathrm{K}_0(\omega)\mathrm{K}_2(\omega)}{\mathrm{K}_1^{\,2}(\omega)}\right] \tag{۳.۵۰}$$

اکنون توان نوری حمل شده در هسته و روکش برابر است با :

$$P_{\text{هسته}} = \frac{\pi}{2}\omega\mu_0\beta|\mathrm{A}|^2\frac{a^4}{u^4}\mathrm{J}_1^{\,2}(u)\left[1 + \frac{\omega^2}{\mathrm{u}^2}\frac{\mathrm{K}_0(\omega)\mathrm{K}_2(\omega)}{\mathrm{K}_1^{\,2}(\omega)}\right] \tag{۳.۵۱}$$

$$P_{\text{روکش}} = \frac{\pi}{2}\omega\mu_0\beta|\mathrm{A}|^2\frac{a^4}{u^4}\mathrm{J}_1^{\,2}(u)\left[\frac{\mathrm{K}_0(\omega)\mathrm{K}_2(\omega)}{\mathrm{K}_1^{\,2}(\omega)} - 1\right] \tag{۳.۵۲}$$

توان کل مد TE برابر با روابط (۳.۵۱) و (۳.۵۲) می‌باشد :

$$P_{\text{هسته}} + P_{\text{روکش}} = \frac{\pi}{2}\omega\mu_0\beta|\mathrm{A}|^2\frac{a^4\upsilon^2}{u^4}\mathrm{J}_1^{\,2}(u)\frac{\mathrm{K}_0(\omega)\mathrm{K}_2(\omega)}{\mathrm{K}_1^{\,2}(\omega)} \tag{۳.۵۳}$$

ثابت A از معادله (۳.۵۳) بدست می‌آید و نسبت توان محدود شده به توان کل در هسته و روکش برابر است با :

$$\frac{P_{\text{هسته}}}{P} = 1 - \frac{\mathrm{u}^2}{\mathrm{v}^2}\left[1 - \frac{\mathrm{K}_1^{\,2}(\omega)}{\mathrm{K}_0(\omega)\mathrm{K}_2(\omega)}\right] \tag{۳.۵۴}$$

$$\frac{P_{\text{روکش}}}{P} = \frac{\mathrm{u}^2}{\mathrm{v}^2}\left[1 - \frac{\mathrm{K}_1^{\,2}(\omega)}{\mathrm{K}_0(\omega)\mathrm{K}_2(\omega)}\right] \tag{۳.۵۵}$$

۲-۳-۳. مدهای TM

با جایگزینی معادلات (۳.۲۹) در (۳.۴۳) و با اعمال همان فرآیندی که برای مدهای TE انجام شد، توان هسته و روکش را برای حالت TM بدست می‌آوریم :

$$P_{\text{هسته}} = \frac{\pi}{2}\omega\mu_0\beta|\mathrm{A}|^2\frac{a^4}{u^4}\left[\mathrm{J}_1^{\,2}(u) - \mathrm{J}_0(u)\mathrm{J}_2(u)\right] \tag{۳.۵۶}$$

$$P_{\text{روکش}} = \frac{\pi}{2}\omega\mu_0\beta|\mathrm{A}|^2\frac{a^4\mathrm{J}_0^{\,2}(\mathrm{u})}{u^4\mathrm{K}_0^{\,2}(\omega)}\left[\mathrm{K}_0(\omega)\mathrm{K}_2(\omega) - \mathrm{K}_1^{\,2}(\omega)\right] \tag{۳.۵۷}$$

معادلات بالا را با استفاده از روابط بازگشتی تابع بسل و معادله پراکندگی، بازنویسی می‌کنیم :

$$P_{\text{هسته}} = \frac{\pi}{2}\omega\mu_0\beta|A|^2\frac{a^4}{u^4}J_1^{\,2}(u)\left[1+\frac{n_1^{\,2}}{n_0^{\,2}}\frac{\omega^2}{u^2}\frac{K_0(\omega)K_2(\omega)}{K_1^{\,2}(\omega)}\right]+(1-\frac{n_0^{\,2}}{n_1^{\,2}})\frac{J_0^{\,2}(u)}{J_1^{\,2}(u)} \qquad (۳.۵۸)$$

$$P_{\text{روکش}} = \frac{\pi}{2}\omega\mu_0\beta|A|^2\frac{a^4}{u^4}J_1^{\,2}(u)\frac{n_1^{\,2}}{n_0^{\,2}}\left[\frac{K_0(\omega)K_2(\omega)}{K_1^{\,2}(\omega)}-1\right] \qquad (۳.۵۹)$$

توان کل مد TM برابر است با :

$$P_{\text{هسته}} + P_{\text{روکش}} =$$

$$\frac{\pi}{2}\omega\varepsilon_0\beta|A|^2\frac{a^4}{u^4}J_1^{\,2}(u)\left[\frac{n_1^{\,2}}{n_0^{\,2}}\frac{\upsilon^2}{u^4}\frac{K_0(\omega)K_2(\omega)}{K_1^{\,2}(\omega)}+(1-\frac{n_0^{\,2}}{n_1^{\,2}})\left(1-\frac{n_0^{\,2}}{n_1^{\,2}}\frac{J_0^{\,2}(u)}{J_1^{\,2}(u)}\right)\right] \qquad (۳.۶۰)$$

۳-۳-۳. مدهای هیبریدی

برای تحلیل توان در مدهای هیبریدی از معادلات مشتق هسته و روکش شروع می‌کنیم :

$$P_{\text{هسته}} = \frac{\pi}{4}\omega\varepsilon_0 n_1^{\,2}\beta|A|^2\frac{a^2}{u^2}\,[(1-s)(1-s_1)\int_0^a J_{n-1}^{\,2}(u)\,rdr -$$

$$(1+s)(1+s_1)\int_0^a J_{n+1}^{\,2}\left(\frac{u}{a}r\right)rdr] \qquad (۳.۶۱)$$

$$P_{\text{روکش}} = \frac{\pi}{4}\omega\varepsilon_0 n_1^{\,2}\beta|A|^2\frac{a^2 J_n^{\,2}(u)}{\omega^4 K_n^{\,2}(\omega)}\,[(1-s)(1-s_0)\int_0^a K_{n-1}^{\,2}(u)\,rdr -$$

$$(1+s)(1+s_0)\int_0^a K_{n+1}^{\,2}\left(\frac{\omega}{a}r\right)rdr \qquad (۳.۶۲)$$

۳-۴. مدهای قطبیده خطی

مدهای قطبیده خطی با تقریب $n_1/n_0 \cong 1$ (چون محدود شدن نور در داخل هسته خیلی زیاد نیست به آن تقریب هدایت ضعیف می‌گویند) بدست می‌آیند.

۳-۴-۱. معادله یکسان‌سازی‌شده پراکندگی مدهای قطبیده خطی (LP)

حل دقیق مدهای TE در معادله (۳.۱۸) بیان شد و برای مدهای TM (در تقریب هدایت ضعیف $n_1/n_0 \cong 1$) در معادله پراکندگی(۳.۲۷) بیان شد که به فرم تقریبی زیر رسید :

$$\frac{J_1(u)}{uJ_n(u)} = -\frac{K_1(\omega)}{\omega K_0(\omega)} \qquad (۳.۶۳)$$

برای مدهای هیبریدی، تقریب هدایت ضعیف $n_1/n_0 \cong 1$ را در معادله پراکندگی (۳.۳۷) اعمال می‌کنیم و دو معادله بدست می‌آوریم :

$$\frac{J_n'(u)}{uJ_n(u)} + \frac{K_n'(\omega)}{\omega K_n(\omega)} = \pm n\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{\omega^2}\right) \quad (۳.۶۴)$$

$n \gg 1$ در معادله (۳.۶۴) با استفاده از روابط بازگشتی توابع بسل (۳.۳۷) ، بازنویسی خواهد شد :

$$\frac{J_{n+1}(u)}{uJ_n(u)} = -\frac{K_{n+1}(\omega)}{\omega K_n(\omega)}$$ (دارای مدهای EH و میدان H_z خیلی قوی) (۳.۶۵ الف)

$$\frac{J_{n-1}(u)}{uJ_n(u)} = \frac{K_{n-1}(\omega)}{\omega K_n(\omega)}$$ (دارای مدهای HE و میدان E_z خیلی قوی) (۳.۶۵ ب)

با تقریب $n_1 \cong n_0$ می‌توان $s_1 = s\beta^2/k^2\, n_1{}^2$ و $s_0 = s\beta^2/k^2\, n_0{}^2$ را بازنویسی کرد. میدان‌های مدهای EH را با قرار دادن تقریب $\boldsymbol{S_1 \cong 1}$ و $\boldsymbol{S_0 \cong 1}$ بدست می آوریم و میدان‌های مدهای HE، را با قرار دادن تقریب $\boldsymbol{S_1 \cong -1}$ و $\boldsymbol{S_0 \cong -1}$ بدست می‌آوریم. همچنین جملات $\boldsymbol{J_{n-1}(ur/a)}$ و $\boldsymbol{K_{n-1}(wr/a)}$ ، جملات اصلی در مدهای HE هستند. معادله پراکندگی مدهای HE دارای عدد مد سمتی $\boldsymbol{n \geq 2}$ می‌باشد، یعنی ابتدا معادله (۳.۶۵ ب) معکوس می‌شود و سپس روابط بازگشتی برای توابع بسل در $\boldsymbol{J_n(u)}$ و $\boldsymbol{K_n(w)}$ اعمال می‌شوند :

$$\frac{J_{n-1}(u)}{uJ_{n-1}(u)} = -\frac{K_{n-1}(\omega)}{\omega K_{n-2}(\omega)} \quad (۳.۶۶)$$

تعیین مد	معادله پراکندگی $(\ell \gg 1)$
مد $TE_{0\ell}$	$\frac{J_1(u)}{uJ_0(u)} = -\frac{K_1(\omega)}{\omega K_0(\omega)}$
مد $TM_{0\ell}$	$\frac{J_1(u)}{uJ_0(u)} = -\frac{K_1(\omega)}{\omega K_0(\omega)}$
مد $EH_{n\ell}$ $(n \gg 1)$	$\frac{J_{n+1}(u)}{uJ_n(u)} = -\frac{K_{n+1}(\omega)}{\omega K_n(\omega)}$
مد $HE_{1\ell}$	$\frac{J_0(u)}{uJ_1(u)} = -\frac{K_0(\omega)}{\omega K_1(\omega)}$
مد $HE_{n\ell}$ $(n \gg 2)$	$\frac{J_{n-1}(u)}{uJ_{n-1}(u)} = -\frac{K_{n-1}(\omega)}{\omega K_{n-2}(\omega)}$

جدول ۱-۳. معادلات پراکندگی مد های TEو TM و هیبریدی EH و HE تحت تقریب هدایت ضعیف.

با توجه به شباهت بین مدهای LP در جدول ۱-۳، یک پارامتر جدید را معرفی می کنیم :

$$m = \begin{cases} 1 & TE \text{ و } TM \\ n+1 & EH \\ n-1 & HE \end{cases} \quad (۳.۶۷)$$

عدد صحیح مرتبه n مرتبه مد در جهت سمتی θ است و ℓ (≫1) مرتبه مد در راستای شعاعی است. نمایش ℓ امین پاسخ معادله پراکندگی است. برای مد $HE_{1\ell}$ با $m = 0$ $(n = 1)$ ، فرمول تابع بسل $J_{-1}(u) = -J_1(u)$ و $K_{-1}(\omega) = -K_1(\omega)$ باید در معادله زیر قرار گیرد :

$$\frac{J_m(u)}{uJ_{m-1}(u)} = -\frac{K_m(\omega)}{\omega K_{m-1}(\omega)} \qquad (۳.۶۸)$$

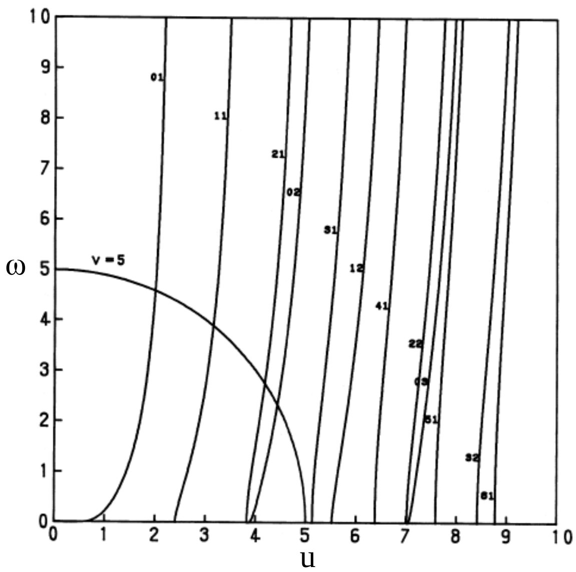
با استفاده از رابطه (۳.۶۸) به این نتیجه می‌رسیم که مدهایی با پارامترهای یکسان m و ℓ ، دارای ویژه مقادیر یکسانی در تقریب هدایت ضعیف هستند. جدول ۲-۳ ، رابطه بین مدهای LP و مدهای معمولی را مقایسه می‌کند. سه نوع مد $TE_{0\ell}$ و $TM_{0\ell}$ و $HE_{2\ell}$ مربوط به $m = 1$ و ترکیب‌های $HE_{m-1,\ell}$ و $HE_{m+1,\ell}$ مربوط به $m \geq 2$ دارای معادله پراکندگی یکسانی هستند، یعنی اولین انتشار این گروه از مدهای معمول، تبهگن است. همچنین مدهای HE و EH دارای دو وابستگی سمتی مجزا با مولفه‌های $\cos(n\theta)$ و $\sin(n\theta)$ در $\psi=0,\pi/2$ دارند. مدهای TE و TM از لحاظ قطبش تبهگن نیستند چون دارای توزیع میدان متقارن محوری $(n=0)$ هستند. بنابراین حل معادله پراکندگی مربوط به ترکیب (m,L) به ازای $m=0$ دارای تبهگنی دوگانه و به ازای $m\leq1$ ، دارای تبهگنی چهارگانه می‌باشد.

مد LP ($\ell \gg 1$)	مد معمولی	معادله پراکندگی
مد $LP_{0\ell}$ (m = 0)	مد $HE_{1\ell}$ مد $TE_{0\ell}$	$\frac{J_0(u)}{uJ_1(u)} = \frac{K_0(\omega)}{\omega K_1(\omega)}$
مد $LP_{1\ell}$ (m = 1)	مد $HE_{2\ell}$ مد $TM_{0\ell}$	$\frac{J_1(u)}{uJ_0(u)} = -\frac{K_1(\omega)}{\omega K_0(\omega)}$
مد $LP_{1\ell}$ (m ≫ 2)	مد $HE_{m+1,\ell}$ مد $HE_{m-1,\ell}$	$\frac{J_m(u)}{uJ_{m-1}(u)} = -\frac{K_m(\omega)}{\omega K_{m-1}(\omega)}$

جدول ۲-۳. رابطه بین مدهای LP و مدهای معمولی.

۲-۴-۳. خصوصیات پراکندگی مدهای قطبیده خطی (LP)

ثابت انتشار فیبرهای با ضریب شکست پله‌ای با حل معادله پراکندگی در جدول ۲-۳ و تحت شرایط $u^2+\omega^2=v^2$ بدست می‌آید. رابطه بین اعداد موج عرضی به ازای $v = 5$ در شکل ۱-۳، رسم شده است.



شکل ۱-۳. رابطه u-ω در فیبر ضریب شکست پله‌ای.

از محل تقاطع خطهای عمودی با نیم دایره، مقادیر u و ω در مد مربوطه بدست می‌آید و سپس ثابت انتشار بدست می‌آید. برای آنکه مقادیر قطع v را در معادله پراکندگی بدست آوریم، ابتدا از روابط زیر (اگر $u\to0$ و $\omega\to0$) استفاده می‌کنیم :

$$\begin{cases} \dfrac{J_0(u)}{\nu J_1(u)} \to \infty & (m = 0) \\ \dfrac{J_m(u)}{\nu J_{m-1}(u)} \to -\infty & (m \geq 1) \end{cases} \tag{۳.۶۹}$$

سپس با درنظر گرفتن توابع بسل، از روابط زیر استفاده می‌کنیم :

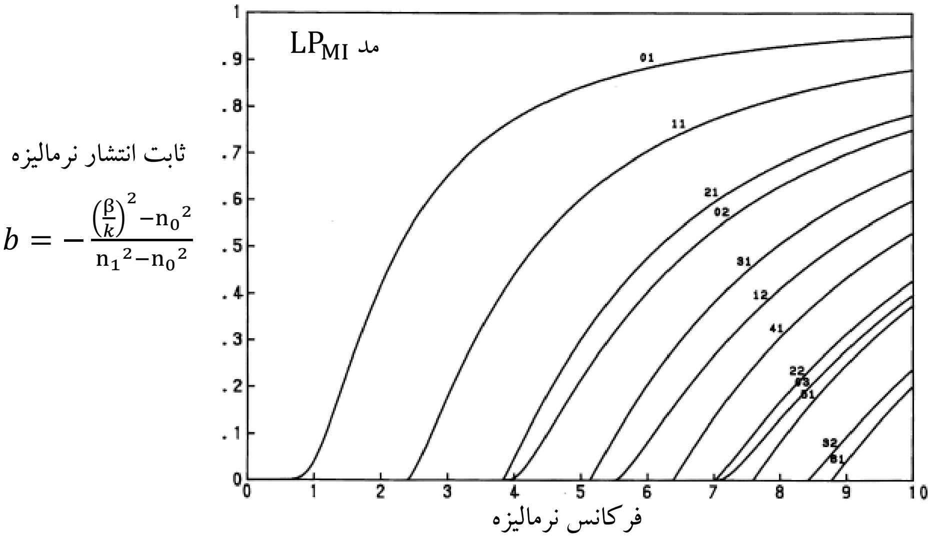
$$\nu_c = \begin{cases} 0 & HE_{11}\ (LP_{01}) \\ j_{1,\ell-1} & HE_{1\ell}\ (LP_{0\ell})\ ,(\ell \geq 2) \end{cases} \tag{۳.۷۰ الف}$$

$$\nu_c = j_{m-1,\ell} \qquad LP_{m\ell}\ (m \geq 1\ ,\ell \geq 1) \tag{۳.۷۰ ب}$$

$j_{,\ell}$ ریشه ℓ ام تابع بسل مرتبه n ام ، $j_n(x)$ است و هیچ مقدار قطع برای مد $HE_{11}\ (LP_{01})$ وجود ندارد، پس مد HE_{11} ، مد اصلی فیبر است. LP_{11} مد مرتبه دو است و مقادیر قطع آن که تعیین‌کننده شرط تک مد بودن فیبر با ضریب شکست پله‌ای است، برابر با $\nu_c = j_{0,1} = 2.4048256$ می‌باشد. رفتار معادله پراکندگی برای $\omega \gg 1$ با استفاده از تابع بسل تعمیم یافته $K_m(\omega) \cong -\sqrt{\pi/2\omega}\, e^{-\omega}$ بدست می‌آید و با روابط $J_0(u)/uJ_1(u)$ یا $-J_m(u)/uJ_{m-1}(u)$ بیان می‌شود. اگر $\omega \gg 1$ باشد، $u = J_{m,1}$ خواهد بود. با استفاده از روابط بالا، بازه تغییرات u برای مد LP برابر است با :

$$\begin{cases} LP_{01}\ (HE_{11}) & u = 0 - j_{0,1} \\ LP_{0\ell}\ (HE_{11}\ :\ \ell \geq 2) & u = j_{1,\ell-1} - j_{0,\ell} \\ LP_{m\ell}\ (m \geq 1\ ,\ell \geq 1) & u = j_{m-1,\ell} - j_{m,\ell} \end{cases} \tag{۳.۷۱}$$

طبق شکل ۲-۳، منحنی پراکندگی مدهای فیبر با ضریب شکست پله‌ای با حل عددی معادلات پراکندگی و تحت شرایط $u^2 + \omega^2 = \nu^2$ بدست می‌آید. محوری عمودی، ثابت انتشار نرمالیزه b و محور افقی، فرکانس نرمالیزه ν است.



شکل ۲-۳. منحنی های پراکندگی مدهای LP در فیبر ضریب شکست پله‌ای.

۳-۴-۳. توان منتشر شده مدهای قطبیده خطی (LP)

توان حمل شده توسط مدهای TE و TM برابر است با :

$$\begin{cases} \frac{P_{\text{هسته}}}{P} = 1 - \frac{u^2}{v^2}[1-\xi_1(\omega)] \\ \frac{P_{\text{روکش}}}{P} = \frac{u^2}{v^2}[1-\xi_1(\omega)] \end{cases} \qquad \left(\xi_m(\omega) = \frac{K_m^{\ 2}(\omega)}{K_{m-1}(\omega)K_{m+1}(\omega)}\right) \qquad (۳.۷۲)$$

توان اپتیکی مد HE با جایگزینی $s \cong s_1 \cong s_0 \cong 1$ در معادلات (۳.۶۱) و (۳.۶۲) و با استفاده از معادله (۳.۶۵) و رابطه بازگشتی تابع بسل بدست می‌آید :

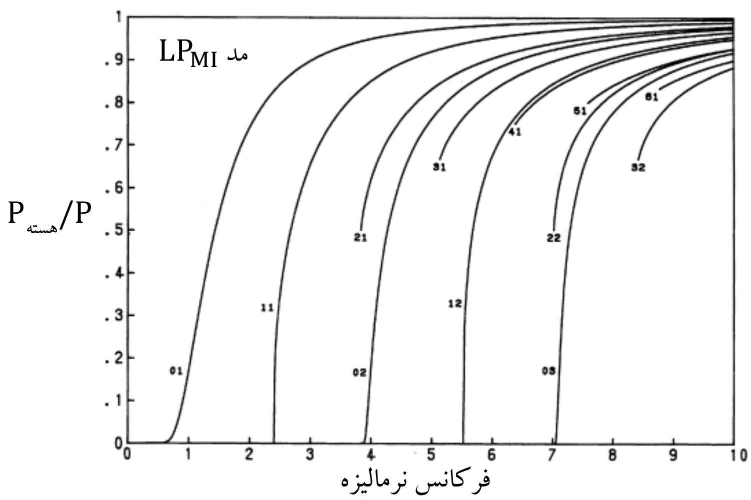
$$P = P_{\text{هسته}} + P_{\text{روکش}} = \frac{\pi}{4}\omega\varepsilon_0 n_1^{\ 2}\beta|A|^2\frac{a^4}{u^4}J^2_{\ n-1}(u)\frac{v^2}{\xi_{n-1}(\omega)} \qquad (۳.۷۳)$$

$$\begin{cases} \frac{P_{\text{هسته}}}{P} = 1 - \frac{u^2}{v^2}[1-\xi_{n-1}(\omega)] \\ \frac{P_{\text{روکش}}}{P} = \frac{u^2}{v^2}[1-\xi_{n-1}(\omega)] \end{cases} \qquad (۳.۷۴)$$

توان حمل شده توسط مد **PL** (با استفاده از پارامتر **m** رابطه (۳.۶۷) برابر است با :

$$\begin{cases} \frac{P_{\text{هسته}}}{P} = 1 - \frac{u^2}{v^2}[1-\xi_m(\omega)] \\ \frac{P_{\text{روکش}}}{P} = \frac{u^2}{v^2}[1-\xi_m(\omega)] \end{cases} \qquad (۳.۷۵)$$

تمام مدها در فیبرهای چند مدی به رابطه $P_{\text{هسته}}/P \cong 1$ می‌رسند و بیشتر از ۱۰ درصد توان اپتیکی حمل شده در فیبرهای تک مد در پوشش می‌باشد (شکل۳-۳).



شکل ۳-۳. ضریب محصورشدگی توان در برابر هسته $P_{\text{هسته}}/P$ فیبر ضریب پله‌ای.

۵-۳. مد اصلی HE_{11}

برای بررسی انتقال سیگنال‌ها در فیبر تک مد و پراکندگی و توزیع میدان‌های الکترومغناطیسی در مد اصلی فیبر نوری (مد HE_{11}) ، روابط (۳.۳۷) و (۳.۳۸) را بازنویسی می‌کنیم و از روابط بازگشتی $J' = J_0 - J_1/u$ و $K' = K_0 - K_1/\omega$

استفاده می‌کنیم. از آنجا که معادلات پراکندگی برابر با $J_1'(u)/ uJ_1 (u) + K_1'(\omega)/ \omega K_1' (\omega) \cong -(1/u^2+1/ \omega^2)$ هستند و فیبرها، $\Delta \ll 1$ هستند، آن‌گاه معادلات (۳.۳۷) و(۳.۳۸) به روابط زیر کاهش می‌یابند :

$$\frac{J_0(u)}{uJ_1(u)} + \frac{k'_1(\omega)}{\omega k_1(\omega)} = -\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{\omega^2}\right) \qquad (۳.۷۶)$$

$$s = 1 + \frac{u^2\omega^2}{\upsilon^2}\frac{J_0(u)}{uJ_1(u)}\Delta + O(\Delta^2) \qquad (۳.۷۷)$$

چون ماکزیمم $(u\omega/\upsilon)^2 J_0(u)/uJ_1(u)$ برابر با ۰.۷ درصد است، پس $\boldsymbol{S} \cong -\mathbf{1}$ می‌باشد. با قرار دادن $\boldsymbol{n}=\mathbf{1}$ در معادلات (۳.۴۰) و (۳.۴۱) و با استفاده از معادلات (۳.۷۸) ، توزیع میدان مغناطیسی مد HE_{11} را در دستگاه دکارتی بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} E_x = E_r\cos\theta - E_\theta\sin\theta \\ E_y = E_r\sin\theta + E_\theta\cos\theta \end{cases} \qquad (۳.۷۸ \text{ الف})$$

$$\begin{cases} H_x = H_r\cos\theta - H_\theta\sin\theta \\ H_y = H_r\sin\theta + H_\theta\cos\theta \end{cases} \qquad (۳.۷۸ \text{ ب})$$

آ. ناحیه هسته $(0 \le r \le a)$:

$$\begin{cases} E_x = -jA\beta\frac{a}{u}\left[\frac{(1-s)}{2}J_0\left(\frac{u}{a}r\right)\cos\psi - \frac{(1+s)}{2}J_2\left(\frac{u}{a}r\right)\cos(2\theta + \psi)\right] \\ E_y = jA\beta\frac{a}{u}\left[\frac{(1-s)}{2}J_0\left(\frac{u}{a}r\right)\sin\psi + \frac{(1+s)}{2}J_{n+1}\left(\frac{u}{a}r\right)\sin(2\theta + \psi)\right] \\ E_z = AJ_1\left(\frac{u}{a}r\right)\cos(\theta + \psi) \\ H_x = -jA\omega\varepsilon_0 {n_1}^2\frac{a}{u}\left[\frac{(1-s_1)}{2}J_0\left(\frac{u}{a}r\right)\sin\psi + \frac{(1+s_1)}{2}J_2\left(\frac{u}{a}r\right)\sin(2\theta + \psi)\right] \\ H_y = -jA\omega\varepsilon_0 {n_1}^2\frac{a}{u}\left[\frac{(1-s_1)}{2}J_0\left(\frac{u}{a}r\right) - \frac{(1+s_1)}{2}J_2\left(\frac{u}{a}r\right)\cos(2\theta + \psi)\right] \\ H_z = -A\frac{\beta}{\omega\mu_0}sJ_1\left(\frac{u}{a}r\right)\sin(\theta + \psi) \end{cases} \qquad (۳.۷۹)$$

ب. ناحیه پوشش $(r > a)$:

$$\begin{cases} E_x = -jA\beta\frac{aJ_1(u)}{\omega K_1(\omega)}\left[\frac{(1-s)}{2}K_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)\cos\psi + \frac{(1+s)}{2}K_2\left(\frac{\omega}{a}r\right)\cos(2\theta + \psi)\right] \\ E_y = jA\beta\frac{aJ_1(u)}{\omega K_1(\omega)}\left[\frac{(1-s)}{2}K_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)\sin\psi - \frac{(1+s)}{2}K_2\left(\frac{\omega}{a}r\right)\sin(2\theta + \psi)\right] \\ E_z = A\frac{J_1(u)}{K_1(\omega)}K_1\left(\frac{\omega}{a}r\right)\cos(\theta + \psi) \\ H_x = -jA\omega\varepsilon_0 {n_0}^2\frac{aJ_1(u)}{\omega K_1(\omega)}[\frac{(1-s_0)}{2}K_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)\sin\psi - \frac{(1+s_0)}{2}K_2\left(\frac{\omega}{a}r\right)\sin(2\theta + \psi)] \\ H_y = -jA\omega\varepsilon_0 {n_0}^2\frac{aJ_1(u)}{\omega K_1(\omega)}[\frac{(1-s_0)}{2}K_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)\cos\psi + \frac{(1+s_0)}{2}K_2\left(\frac{\omega}{a}r\right)\cos(2\theta + \psi)] \\ H_z = -A\frac{\beta}{\omega\mu_0}s\frac{J_1(u)}{K_1(\omega)}K_1\left(\frac{\omega}{a}r\right)\sin(n\theta + \psi) \end{cases} \qquad (۳.۸۰)$$

در معادلات (۳.۷۹) و (۳.۸۰) ، به ازای $\psi = 0$ و $\psi = \pi/2$ ، دو مد قطبش مجزا وجود دارد. مولفه‌های میدان الکتریکی در هسته (به ازای $\psi = 0$) برابرند با :

$$\begin{cases} E_x = -jA\beta\frac{a}{u}\left[\frac{(1-s)}{2}J_0\left(\frac{u}{a}r\right) - \frac{(1+s)}{2}J_2\left(\frac{u}{a}r\right)\cos(2\theta)\right] \\ E_y = jA\beta\frac{a}{u}\frac{(1+s)}{2}J_2\left(\frac{u}{a}r\right)\sin(2\theta) \\ E_z = AJ_1\left(\frac{u}{a}r\right)\cos(\theta) \end{cases} \qquad (۳.۸۱)$$

مولفه‌های میدان الکتریکی در هسته (به ازای $\psi = \pi/2$) برابرند با :

$$\begin{cases} E_x = -jA\beta\frac{a}{u}\frac{(1+s)}{2}J_2\left(\frac{u}{a}r\right)\sin(2\theta) \\ E_y = jA\beta\frac{a}{u}\left[\frac{(1-s)}{2}J_0\left(\frac{u}{a}r\right) + \frac{(1+s)}{2}J_2\left(\frac{u}{a}r\right)\cos(2\theta)\right] \\ E_z = -AJ_1\left(\frac{u}{a}r\right)\sin(\theta) \end{cases} \qquad (۳.۸۲)$$

معادلات (۳.۷۹) تا (۳.۸۲) ، توزیع میدان مغناطیسی EH_{11} است. دو قطبش متعامد EH_{11} در فیبرهای تک مد، تبهگن هستند و بردار میدان الکتریکی، خطی است . با استفاده از تقریب $s \cong s_1 \cong s_0 \cong -1$ و جایگزینی معادلات (۳.۸۰) و (۳.۸۱) در معادله انتقال توان (۳.۴۳) ، داریم :

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left(E_x \times H_y^{*} - E_y \times H_x^{*}\right)r\,dr\,d\theta \qquad (۳.۸۳)$$

با استفاده از رابطه انتقال (۳.۷۸) ، ضریب دامنه A بدست می‌آید :

$$A = \frac{u\omega}{\beta\alpha^2\upsilon J_1(u)}\sqrt{\frac{2P}{\pi\varepsilon_0 n_1 c}} \qquad (۳.۸۴)$$

۳-۶. خصوصیات پراکندگی فیبر نوری ضریب شکست پله‌ای

۳-۶-۱. اعوجاج سیگنال به دلیل پراکندگی سرعت گروه

اگر یک تابع دارای یک پالس اپتیکی با پوش گاوسین $f(t) = \exp[-(t/t_{in})^2 + j\omega_0 t]\sqrt{2P/\pi\varepsilon_0 n_1 c}$ باشد که به فیبر تزریق می‌شود (ω_0 فرکانس زاویه‌ای، t_{in} پهنای پالس ورودی است) ، جبهه موج پالس اپتیکی، بعد از انتشار در فیبر (به مسافت z) برابر است با :

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)}\,d\omega \qquad (۳.۸۵)$$

$\alpha(\omega)$ ضریب میرایی، $\beta(\omega)$ ثابت انتشار فیبر و $F(\omega)$ طیف فرکانسی پالس اپتیکی است. طیف فرکانسی $F(\omega)$ برابر است با :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \sqrt{\pi}At_{in}\exp\left\{-\left[\frac{(\omega-\omega_0)t_{in}}{2}\right]^2\right\} \qquad (۳.۸۶)$$

همچنین ثابت انتشار $\beta(\omega)$ با بسط تیلور حول فرکانس مرکزی ω_0 ، تقریب زده می‌شود :

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 + \cdots \qquad (۳.۸۷)$$

در اینجا $\beta' = d\beta/d\omega$ و $\beta'' = d^2\beta/d\omega^2$ می‌باشد. جبهه موج پالس خروجی $g(t,z)$ با جایگزینی (۳.۸۶) و (۳.۸۷) در (۳.۸۵) بدست می‌آید :

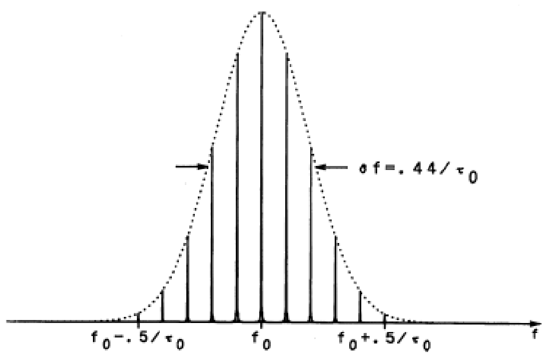
$$g(t) = \frac{A}{\sqrt{\frac{t_{out}}{t_{in}}}} exp\left\{-\alpha z - \left[\frac{(t-\beta' z)}{t_{out}}\right]^2 + j[\omega_0 t - \beta_0 z + \theta(t,z)]\right\} \qquad (۳.۸۸)$$

که در اینجا $t_{out} = \left[{t_{in}}^2 + \left(\frac{2}{t_{in}}\beta' z\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ و $\theta(t,z) = \frac{2\beta'' z}{{t_{in}}^2}\left(\frac{t-\beta' z}{t_{out}}\right)^2 - \frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{(2\beta'' z)}{{t_{in}}^2}\right)$ می‌باشند. رابطه $(t - \beta' z)$ در (۳.۸۸) ، نشان دهنده پالس اپتیکی است و سرعت پالس اپتیکی (سیگنال) برابر است با :

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} \qquad \text{سرعت گروه} \qquad (۳.۸۹)$$

با استفاده از پهنای پالس ورودی به رابطه پهنای پالس(اعوجاج موج) یعنی $\delta t = |2\beta'' z/t_{in}|$ می‌رسیم. مشتق دوم β با $\beta''/(\beta')^2 = -dv_g/d\omega$ بیان می‌شود. اگر سرعت گروه با فرکانس $(-dv_g/d\omega \neq 0)$ یا طول موج $-dv_g/d\lambda \neq (0)$ تغییر کند، آن‌گاه $\beta'' = 0$ می‌شود و این اعوجاج، سیگنال را بوجود می‌آورد. به این تغییرات، پراکندگی سرعت گروه می گویند. همچنین پهنای طیفی پالس سیگنال برابر با $\delta\omega = 2/t_{in}$ می‌باشد و به ازای مقادیر بزرگ $|\beta''|$ و پهنای طیفی $\delta\omega$ ، به پهن‌شدگی پالس بزرگ می‌رسیم. دو عامل محدودکننده در انتقال در فیبر نوری وجود دارد (بزرگ‌تر بودن میرایی از پراکندگی و بزرگ‌تر بودن پراکندگی از افت). توزیع شدت طیفی برای تعداد زیادی پالس برابر است با :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \exp\left\{-\left[\frac{(t-nT)}{t_{in}}\right]^2 + j\omega_0 t\right\} \qquad (۳.۹۰)$$



شکل ۴-۳. توزیع شدت طیفی یک خط طیفی.

پیک شدت $S(\omega)$ هنگامی که به واحد، نرمالیزه شود برابر است با :

$$S(\omega) = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\right|^2 = \lim_{N\to\infty}\left\{\left[\frac{sin(N\phi)}{2N\sin(\phi/2)}\right]^2 e^{-[(\omega-\omega_0)t_{in}]^2/2}\right\} \qquad (۳.۹۱)$$

ϕ برابر با $\phi = (\omega - \omega_0)T = 2\pi(f - f_0)T$ می‌باشد. توزیع شدت طیفی $S(\omega)$، یک خط طیفی می‌باشد (شکل ۴-۳). دو نوع فرمت مدوله سازی پالس وجود دارد (جبهه موج برگشت پذیر به صفر و جبهه موج غیر برگشت پذیر به صفر).

۳-۶-۲. مکانیسم‌های منجر به پراکندگی

زمان (انتشار) تأخیر سیگنال در یک فیبر نوری در اطراف فرکانس مرکزی ω_0 برابر است با :

$$t = \frac{L}{v_g} = \left[\frac{d\beta}{d\omega}\right]_{\omega-\omega_0} . L + (\omega - \omega_0)\left[\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right]_{\omega-\omega_0} . L \qquad (۳.۹۲)$$

به علت مدوله‌شدن یا پهن‌شدگی طیفی چشمه، زمان تاخیر برای مولفه‌های طیفی مختلف، متفاوت می‌باشد و جبهه موج سیگنال در دریافت کننده فیبر نوری تک مد، خراب (مغشوش) می‌باشد. ممکن است سرعت گروه در فیبرهای چند مدی، از یک مد به مد دیگر، متفاوت باشد و پالس دچار پهن‌شدگی شود. چهار نوع پراکندگی زمان – تاخیر در فیبر وجود دارد (جدول ۳-۳).

نوع پراکندگی	ویژگی‌ها
پراکندگی چند مدی	یک پراکندگی زمان تاخیری است که به دلیل اختلاف سرعت گروه مدهای مختلف $([d\beta/d\omega]_{\omega-\omega_0}.L)$ در فیبر چند مدی می‌باشد. شیب منحنی $d\beta/d\omega$، بیانگر سرعت گروه در هر مد می‌باشد و پراکندگی چند مدی به دلیل اختلاف بین شیب مدهای مختلف است.
پراکندگی مد قطبش	یک پراکندگی با اختلاف زمان تاخیر قطبش‌های متعامد ${H_{11}}^y$ و ${H_{11}}^x$ در فیبر تک مد ظاهری و فیبرهای دوشکستی می‌باشد. دو شکستی در فیبر تک مد به دلیل عدم تقارن مرکزی و انحراف بیضوی هسته می‌باشد. حتی اگر فیبر واقعا تک مد باشد، دو نوع پراکندگی وجود دارد (معادله (۳.۹۳)) که متناسب با پهنای طیفی سیگنال می‌باشند.
پراکندگی چند ماده	این پراکندگی، پراکندگی زمان تاخیر است چون ضریب شکست مواد شیشه‌ای بر حسب تغییرات فرکانس یا طول موج تغییر می‌کند (جمله دوم معادله (۳.۹۳)).
پراکندگی موج‌بر	این پراکندگی، پراکندگی زمان تاخیری است که به دلیل محدود شدن نور در ساختار موج‌بر بوجود می‌آید. در موج‌بر غیر خطی، ثابت انتشار به فرکانس زاویه‌ای وابسته است پس پراکندگی موج‌بر یک پراکندگی اصلی و انکار ناپذیر است.

جدول ۳-۳. ویژگی‌های پراکندگی‌ها.

۳-۶-۳. استخراج فرمول زمان – تاخیر

در پراکندگی چند مدی، زمان تاخیر در فیبر (t) نسبت به زمان تاخیر در خلا (L/c) برابر با $ct/L = d\beta/dk$ می‌باشد. زمان تاخیر برای یک موج تخت که در یک ماده همگن منتشر می‌شود برابر است با :

$$\frac{d\beta_0}{dk} = \frac{d(kn)}{dk} = n + k\frac{dn}{dk} = \mathrm{n} - \lambda\frac{dn}{dk} = N \tag{۳.۹۳}$$

N ضریب گروه می‌باشد چون هم تابعی از ضریب شکست و هم سرعت گروه v_g می‌باشد. ضریب شکست شیشه سیلیکا با چند جمله‌ای سلمیر بیان می‌شود :

$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{3}\frac{a_i\lambda^2}{(\lambda^2 - b_i)}} \tag{۳.۹۴}$$

برای پراکندگی ضریب شکست یک فیبر با شیشه آغشته به G_eO_2 در هسته (n_1) و شیشه خالص در غلاف (n_0) داریم :

$$\beta = \mathrm{k}\sqrt{\mathrm{n_0}^2 + (\mathrm{n_1}^2 - \mathrm{n_0}^2)\mathrm{b}} \cong \mathrm{kn_0} + (\mathrm{n_1} - \mathrm{n_0})\mathrm{b} \tag{۳.۹۵}$$

با قرار دادن رابطه (۳.۹۵) در $ct/L = d\beta/dk$ ، داریم :

$$\frac{d\beta}{dk} = N_0 + (N_1 - N_0)\mathrm{b} + (\mathrm{n_1} - n_0)\frac{db}{dk} \tag{۳.۹۶}$$

اگر $(N_1 - N_0) \cong (\mathrm{n_1} - n_0)$ باشد، داریم :

$$\frac{d\beta}{dk} \cong N_0 + (N_1 - N_0)\frac{d(vb)}{dk} \tag{۳.۹۷}$$

برای محاسبه زمان تاخیری $d\beta/dk$ ، باید ضرایب گروه N_1 و N_0 و سپس $d(vb)/dk$ محاسبه شوند. در ابتدا برای مد LP_{MI} ، صورت و مخرج معادله (۳.۶۸) را به صورت معکوس می‌نویسم :

$$\frac{\mathrm{u}J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = -\frac{\omega K_{m-1}(\omega)}{K_m(\omega)} \tag{۳.۹۸}$$

سپس از (۳.۹۸) بر حسب v ، مشتق می گیریم :

$$\frac{d}{du}\left[\frac{\mathrm{u}J_{m-1}}{J_m}\right]\frac{du}{dv} = -\frac{d}{d\omega}\left[\frac{\omega K_{m-1}}{K_m}\right]\frac{d\omega}{dv} \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{du}\left[\dfrac{\mathrm{u}J_{m-1}}{J_m}\right] = \mathrm{u}\left[\dfrac{J_{m-1}(u)J_{m+1}(u)}{{J_m}^2(u)}\right]\\ \dfrac{d}{d\omega}\left[\dfrac{\omega K_{m-1}}{K_m}\right] = \omega\left[\dfrac{K_{m-1}(\omega)K_{m+1}(\omega)}{{K_m}^2(\omega)}\right]\end{cases} \tag{۳.۹۹}$$

با استفاده از فرمول بازگشتی تابع بسل (۳.۳۹) ، رابطه (۳.۹۸) را به صورت زیر می‌نویسم :

$$\frac{\mathrm{u}J_{m+1}(u)}{J_m(u)} = -\frac{\omega K_{m+1}(\omega)}{K_m(\omega)} \tag{۳.۱۰۰}$$

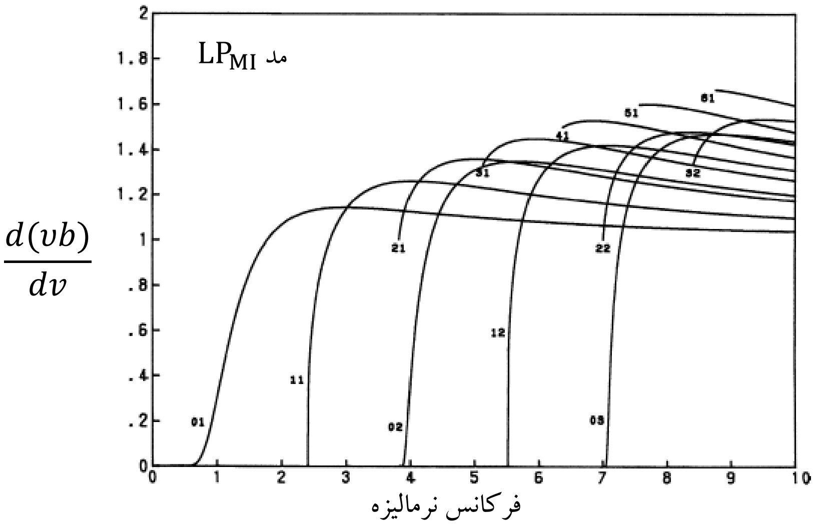
با ترکیب روابط (۳.۹۸) و (۳.۱۰۰) ، داریم :

$$\frac{J_{m-1}J_{m+1}(u)}{J^2{}_m(u)} = \frac{\omega^2}{u^2}\frac{K_{m-1}K_{m+1}(\omega)}{K^2{}_m(\omega)} \qquad (۳.۱۰۱)$$

با استفاده از $u^2 + \omega^2 = v^2$ و روابط (۳.۷۲) ، (۳.۹۹) و (۳.۱۰۱) ، داریم :

$$\frac{du}{dv} = \frac{u}{v}[1 - \xi_m(\omega)] \qquad \underset{\rightarrow}{u = v\sqrt{1-b}} \qquad \frac{d(vb)}{dv} = b + 2(1-b)\xi_m(\omega) \qquad (۳.۱۰۲)$$

به ازای v های بزرگ، تاخیر نرمالیزه $d(vb)/dv$ به یک میل می‌کند (شکل ۵-۳) و زمان تاخیر برابر با $t = N_1L/c$ خواهد بود. پراکندگی چند مدی یک فیبر با ضریب شکست پله‌ای با محاسبه تغییرات $d(vb)/dv$ برای هر مد در نقطه تلاقی منحنی تاخیری نرمالیزه با یک خط مستقیم در یک مقدار v ثابت بدست می‌آید.



شکل ۵-۳. تاخیر زمانی برای فیبر با ضریب شکست پله‌ای .

۴-۶-۳. پراکندگی رنگی

به مجموع پراکندگی ماده و موجبر، پراکندگی رنگی می گویند و پراکندگی زمان-تاخیر گروه برابر است با :

$$\delta t = \frac{L}{v_g} = \left[\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right]_{\omega-\omega_0} . L\delta\omega \qquad \underset{\rightarrow}{\omega = ck \text{ و } k = 2\pi/\lambda} \qquad \delta t = \frac{\delta\lambda}{\lambda}\frac{L}{c}k\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \qquad (۳.۱۰۳)$$

$\delta\lambda/\lambda$ پهنای طیفی چشمه سیگنال است. با دیفرانسیل‌گیری از (۳.۹۹) نسبت به k داریم:

$$k\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \cong k\frac{dN_0}{dk} + k\frac{d(N_1-N_0)}{dk}\frac{d(vb)}{dv} + (N_1 - N_0)v\frac{d^2(vb)}{dv^2} \qquad (۳.۱۰۴)$$

مشتق ضریب گروه N نسبت به k ، برابر می‌شود با :

$$k\frac{dN}{dk} = -\lambda\frac{dN}{dk} = \lambda^2\frac{d^2n}{dk^2} \equiv s \qquad \text{پراکندگی نرمالیزه ماده} \qquad (۳.۱۰۵)$$

جمله $vd^2(vb)/dv^2$ در معادله (۳.۱۰۴) با مشتق‌گیری معادله (۳.۱۰۲) نسبت به v بدست می‌آید :

$$\upsilon \frac{d^2(\upsilon b)}{d\upsilon^2} = 2(1-\mathrm{b})\xi_m(\omega)[(1-\xi_m)+(1+\frac{(1-b)}{b}\xi_m)(2-\xi_m)] \qquad (۳.۱۰۶)$$

در اینجا ξ_m توسط رابطه زیر بیان می‌شود :

$$\xi_m(\omega) = \omega\left[\frac{K_{m-1}(\omega)}{K_m(\omega)}+\frac{K_{m+1}(\omega)}{K_m(\omega)}-\frac{K_m(\omega)}{K_{m+1}(\omega)}+\frac{K_m(\omega)}{K_{m-1}(\omega)}\right] \rightarrow \frac{d\xi_m}{d\omega}=\frac{\xi_m}{\omega}(2-\xi_m) \qquad (۳.۱۰۷)$$

معادله (۳.۱۰۴) به صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$k\frac{d^2\beta}{d\omega^2} = s_0 + (s_1-s_0)\frac{d(\upsilon b)}{d\upsilon}+(N_1-N_0)\upsilon\frac{d^2(\upsilon b)}{d\upsilon^2} \qquad (۳.۱۰۸)$$

در رابطه بالا، جملات اول و دوم بیانگر پراکندگی ماده هستند و جمله سوم بیانگر پراکندگی موجبر می‌باشد. پهن‌شدگی پالس به علت پراکندگی رنگی با رابطه (۳.۱۰۳) بیان می‌شود و پراکندگی توسط واحد طول و پهن‌شدگی طیفی فیبر توصیف می‌شود :

$$\sigma = \frac{\delta t}{L\delta\lambda} = -\frac{1}{c\lambda}k\frac{d^2\beta}{dk^2} \qquad (۳.۱۰۹)$$

پراکندگی رنگی برابر است با :

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{m}}+\sigma_{\omega} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{c\lambda}\left[s_0+(s_1-s_0)\frac{d(\upsilon b)}{d\upsilon}\right] \\ \sigma_{\omega} = -(N_1-N_0)\upsilon\frac{d^2(\upsilon b)}{d\upsilon^2} \end{cases} \qquad (۳.۱۱۰)$$

۳-۷. نظریه موجی فیبرهای ضریب شکست تدریجی

۳-۷-۱. معادلات پایه و مفهوم مد در فیبرهای ضریب شکست تدریجی

برای استخراج معادلات پایه انتشار موج، در ابتدا باید توزیع ضریب شکست و ثابت انتشار موجبر را توصیف کرد :

$$n^2(r) = {n_1}^2[1-f(r)] \qquad \beta^2(r) = k^2{n_1}^2(1-\chi) \qquad (۳.۱۱۱)$$

n_1 ماکزیمم ضریب شکست هسته است. $\mathrm{H_z}$ و $\mathrm{E_z}$ مضربی از توابع r و θ خواهند بود:

$$\mathrm{E}_z = \frac{k^2{n_1}^2}{\beta}\Phi(\mathrm{r})\cos(n\theta+\varphi_n) \qquad \mathrm{H}_z = \omega\varepsilon_1\Psi(\mathrm{r})sin(n\theta+\varphi_n) \qquad (۳.۱۱۲)$$

با جایگزینی روابط (۳.۱۱۱) و (۳.۱۱۲) در معادلات ماکسول داریم :

$$\begin{cases} 1-f \cong 1 \\ 1-\chi = \frac{\beta^2}{k^2{n_1}^2} \cong 1 \\ (\chi-f)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{(\chi-f)}r\frac{d\Phi}{dr}\right]+\left[k^2{n_1}^2(\chi-f)-\frac{n^2}{r^2}\right]\Phi+\frac{n}{r}(\chi-f)\Psi\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\chi-f}\right)=0 \\ (\chi-f)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{(\chi-f)}r\frac{d\Psi}{dr}\right]+\left[k^2{n_1}^2(\chi-f)-\frac{n^2}{r^2}\right]\Psi+\frac{n}{r}(\chi-f)\Phi\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\chi-f}\right)=0 \end{cases} \qquad (۳.۱۱۳)$$

مولفه‌های عرضی میدان بر حسب توابع Ψ و Φ برابرند با :

$$\begin{cases} \mathrm{E}_r = -j\frac{1}{\chi-f}\left[\frac{d\Phi}{dr}+\frac{n}{r}\Psi\right]\cos(n\theta+\varphi_n) \\ \mathrm{E}_\theta = j\frac{1}{\chi-f}\left[\frac{d\Psi}{dr}+\frac{n}{r}\Phi\right]\sin(n\theta+\varphi_n) \\ \mathrm{H}_r = -j\frac{\beta}{\omega\mu_0}\frac{1}{\chi-f}\left[\frac{d\Psi}{dr}+\frac{n}{r}\Phi\right]\sin(n\theta+\varphi_n) \\ \mathrm{H}_\theta = -j\frac{\beta}{\omega\mu_0}\frac{1}{\chi-f}\left[\frac{d\Phi}{dr}+\frac{n}{r}\Psi\right]\cos(n\theta+\varphi_n) \end{cases} \qquad (۳.۱۱۴)$$

حالت‌های مربوط به $\Phi = 0$ و $\mathrm{n} = 0$ در معادلات (۳.۱۱۳) و (۳.۱۱۴) برای مد TE خواهند بود و حالت‌های مربوط به $\Psi = 0$ و $\mathrm{n} = 0$ برای مد TM خواهند بود. با استفاده رابطه (۳.۱۱۵) برای مدهای TM و TE و قرار دادن معادلات (۳.۱۱۳) و (۳.۱۱۴) در آن، به معادله (۳.۱۱۶) می‌رسیم :

$$\mathrm{R(r)} = \begin{cases} j\frac{1}{\chi-f}\frac{d\Psi}{dr} & \mathrm{TE} \\ -j\frac{1}{\chi-f}\frac{d\Phi}{dr} & \mathrm{TM} \end{cases} \qquad (۳.۱۱۵)$$

$$\mathrm{R(r)} = \begin{cases} j\frac{j}{k^2{n_1}^2}\left[\frac{d\mathrm{R}}{dr}+\frac{1}{r}\mathrm{R}\right] & \mathrm{TE} \\ \frac{-j}{k^2{n_1}^2}\left[\frac{d\mathrm{R}}{dr}+\frac{1}{r}\mathrm{R}\right] & \mathrm{TM} \end{cases} \qquad (۳.۱۱۶)$$

با جایگزینی هر یک از این معادلات در معادله (۳.۱۱۵) ، معادله موج برای مدهای TM و TE ، یک شکل خواهد بود :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right) + \left[k^2{n_1}^2(\chi-f) - \frac{1}{r^2}\right]\mathrm{R} = 0 \qquad (۳.۱۱۷)$$

برای یافتن مدهای هیبریدی از دو متغیر $\phi = \Phi + \Psi/2$ و $\psi = \Phi - \Psi/2$ استفاده می‌کنیم. با محاسبه جمع و تفاضل معادلات (۳.۱۱۳) و بازنویسی آنها بر حسب ϕ و ψ ، داریم :

$$\begin{cases} (\chi-f)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{(\chi-f)}r\frac{d\psi}{dr}\right] + \left[k^2{n_1}^2(\chi-f) - \frac{n^2}{r^2}\right]\psi + \frac{n}{r}(\chi-f)\psi\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\chi-f}\right) = 0 \\ (\chi-f)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{(\chi-f)}r\frac{d\phi}{dr}\right] + \left[k^2{n_1}^2(\chi-f) - \frac{n^2}{r^2}\right]\phi + \frac{n}{r}(\chi-f)\phi\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\chi-f}\right) = 0 \end{cases} \qquad (۳.۱۱۸)$$

معادلات دیفرانسیل (۳.۱۱۳) می‌توانند به دو معادله مستقل (برای دو کمیت اسکالر ϕ و ψ) تفکیک شوند، پس دو حالت داریم : $\phi = 0\,, \psi \neq 0$ (برای مد EH) و $\phi \neq 0\,, \psi = 0$ (برای مد HE).

_ اگر $\phi = 0$ آنگاه $\psi = \Phi = -\Psi$. بنابراین با جایگزینی $\mathrm{R(r)} = -j\frac{1}{\chi-f}\left[\frac{d\psi}{dr}-\frac{n}{r}\psi\right]$ در معادله بالایی (۳.۱۱۸)، داریم :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right) + \left[k^2{n_1}^2(\chi-f) - \frac{(n+1)^2}{r^2}\right]\mathrm{R} = 0 \qquad \text{معادله موج مد EH} \qquad (۳.۱۱۹)$$

_ اگر $\psi = 0$ آنگاه $\Phi = \Phi = \Psi$. بنابراین با جایگزینی $R(r) = -j\frac{1}{\chi - f}\left[\frac{d\phi}{dr} + \frac{n}{r}\phi\right]$ در معادله پایینی (۳.۱۱۸)، داریم :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \left[k^2{n_1}^2(\chi - f) - \frac{(n-1)^2}{r^2}\right]R = 0 \qquad \text{HE معادله موج مد} \qquad (۳.۱۲۰)$$

بنابراین معادله موج پایه‌ای فیبر با ضریب شکست پله‌ای برابر است با :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \left[k^2n^2(r) - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2}\right]R = 0 \qquad (۳.۱۲۱)$$

عدد صحیح m برابر با معادله (۳.۶۷) می‌باشد. ضریب شکست فیبرهای کاربردی در پوشش ثابت است اما در هسته متغیر است. می توان معادله موج هسته و پوشش را جداگانه حل کرد و پاسخش را در مرز پوشش- غلاف با شرایط مرزی فیزیکی تطبیق داد. اگر توابع میدان عرضی در هسته و پوشش با $R(r)$ و $R_{clad}(r)$ مشخص شوند، شرایط مرزی تقریب ضعیف برابر خواهند بود با :

$$R(a) = R_{clad}(r) \rightarrow \left[\frac{dR}{dr}\right]_{r=a} = \left[\frac{dR_{clad}}{dr}\right]_{r=a} \qquad (۳.۱۲۲)$$

روش المان محدود برای فیبر با ضریب شکست تدریجی مناسب است. روش FEM برای فیبرهای چند مدی با $\boldsymbol{v}$ های بزرگ، مناسب است و روش WKB برای فیبرهای تک مدی، مناسب است.

۳-۷-۲. خصوصیات پراکندگی فیبرهای ضریب شکست تدریجی

معادله (۳.۹۳) بیانگر زمان تاخیر در فیبرهای اپتیکی است. عبارت $L.[d\beta/d\omega]_{\omega-\omega_0}$ در فیبرهای چند مدی، اثر دو برابری بر پراکندگی چند مدی دارد و زمان تاخیر برابر می‌شود با :

$$t = \frac{L}{v_g} = \left[\frac{d\beta}{d\omega}\right]_{\omega-\omega_0}.L = \frac{L}{c}\frac{d\beta}{dK} \qquad (۳.۱۲۳)$$

با جایگزینی معادله (۳.۱۲۳) در $\beta = kn_1\left[1 - 2\Delta(\frac{v}{N})^{\alpha/(\alpha+2)}\right]^{1/2}$ ، داریم :

$$t = \frac{LN_1}{c}\frac{1}{(1-2\Delta x)^{1/2}}\left[1 - \left(2 + \frac{y}{2} + \frac{n_1}{N_1}\frac{k}{x}\frac{dx}{dk}\right)\Delta x\right] \qquad (۳.۱۲۴)$$

N_1 ضریب گروه است و y کمیت اندازه‌گیری طول موج (وابسته به Δ) است که با رابطه $y = \frac{2n_1}{N_1}\frac{k}{\Delta}\frac{d\Delta}{dk} = -\frac{2n_1}{N_1}\frac{\lambda}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\lambda}$ برابر می‌باشد. با استفاده از رابطه $\frac{dN}{dk} = \frac{N}{k}(2 + \frac{y}{2})$ به رابطه $\frac{k}{x}\frac{dx}{dk} = -\frac{\alpha}{\alpha+2}(2 + \frac{y}{2})$ می‌رسیم و این رابطه را در معادله (۳.۱۲۴) قرار می‌دهیم و سپس با استفاده از بسط تیلور $(1 - 2\Delta x)^{-1/2} \cong 1 + \Delta x + (3/2)\Delta^2x^2$ ، زمان تاخیری را بدست خواهیم آورد :

$$t = \frac{LN_1}{c}\frac{1}{(1-2\Delta x)^{1/2}}\left[1 + \frac{(\alpha-2-y)}{(\alpha+2)}\Delta x + \frac{(3\alpha-2-2y)}{2(\alpha+2)}\Delta^2x^2 + O(\Delta^3)\right] \qquad (۳.۱۲۵)$$

جملات دوم و سوم معادله (۳.۱۲۵) بیانگر وابستگی زمان تاخیر مد مرتبه x هستند و با توجه به $\Delta \ll 1$ ، اختلاف زمان تاخیر توسط جمله دوم تعیین می‌شود. پس پراکندگی زمانی چند مدی، کوچک می‌شود و چون پراکندگی تابعی از زمان تاخیر است، پروفایل شکست برابر با $\alpha = \alpha_0 = 2 + y$ می‌شود. همچنین پراکندگی چند مدی δt (با استفاده از پاسخ موجک h(t)) و مینگین زمانی $\langle t \rangle$ برابرند با :

$$\delta t = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t) t^2 dt - \langle t \rangle^2\right]^{1/2} \qquad \langle t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) t \, dt \qquad (۳.۱۲۶)$$

تابع پاسخ توان α فیبر برابر است با :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{(\alpha+2)}{\alpha} \left| \frac{(\alpha+2)}{(\alpha-2-y)} \Delta \right|^{\frac{(\alpha+2)}{\alpha}} & \tau^{2/\alpha} \ (\alpha \neq 2 + y) \\ \frac{2}{\Delta^2} & (\alpha = 2 + y) \end{cases} \qquad (۳.۱۲۷)$$

τ بیانگر اختلاف زمان تاخیر نرمالیزه است و برابر با $\tau = ct/LN_1 - 1$ می‌باشد. ساختن فیبر ضریب شکست تدریجی با پروفایل توان α_{opt} ، سخت است چون پراکندگی چند مدی به تغییرات جزئی در پارامترهای پروفایل، حساس است.

۳-۷-۳. رابطه بین پراکندگی و ظرفیت انتقال

برای بررسی اثرات پراکندگی (همانند چند مدی، ماده و موج‌بر) بر زمان پراکندگی δt (پهن‌شدگی پالس)، باید ارتباط بین δt و پهنای باند یک فیبر نوری را بررسی کرد. هنگامی‌که پهن‌شدگی پالس یک فیبر نوری برابر با δt باشد، آنگاه پاسخ موجک برابر خواهد بود با :

$$h(t) = \frac{(\alpha+2)}{\delta t \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{(\delta t)^2}\right] \qquad (۳.۱۲۸)$$

با استفاده از تبدیل فوریه پاسخ موجک $h(t)$ می‌توان پاسخ فرکانسی باند پایه در یک فیبر نوری برسیم :

$$\mathrm{H}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp[-j2\pi(f - f_0)t] \, dt = \exp\left\{\left[\sqrt{2}\pi(f - f_0)\delta t\right]^2\right\} \qquad (۳.۱۲۹)$$

f_0 بیانگر فرکانس مرکزی سیگنال است و پالس سیگنال، بازه فرکانسی $f - f_0 \leq B/2$ را اشغال می‌کند (B بیانگر نرخ ضربان است). فرکانس‌های مینیمم و ماکزیمم نرخ ضربان، به ترتیب برابر با $f_{min} \cong f_0 - B/2$ و $f_{max} \cong f_0 + B/2$ می‌باشند. طبق معادله (۳.۱۳۱) ، پاسخ فرکانسی باند پایه با فرکانس مدوله f یا نرخ ضربان B ، افزایش می‌یابد. اگر فرکانس مدوله ماکزیمم f_{max} ، به صورت فرکانسی بیان شود برابر با $10\log \frac{\mathrm{H}(f_{max})}{\mathrm{H}(f_0)} \geq -1$ [dB] خواهد بود.

۳-۸ فیبر چند مدی

ظرفیت انتقال در یک فیبر چند مدی ضریب شکست پله‌ای دارای یک پروفایل توان α_{opt} است.

۳-۹ فیبر تک مدی

پهن‌شدگی پالس فیبر تک مد برابر با $\delta t = \sigma L \delta\lambda$ است. δt متناسب با پراکندگی فیبر σ و پهنای طیفی چشمه سیگنال $\delta\lambda$ است. پهن‌شدگی دارای دو حالت می‌باشد :

ـ پهن‌شدگی طیفی به دلیل مدوله‌شدن سیگنال بزرگتر از پهن‌شدگی خود لیزر : اگر بازه فرکانسی سیگنال یک پالس فیبر تک مد بر حسب طول موج، بازنویسی شود :

$$B = f_{max} - f_{min} = \frac{c}{(\lambda_0 - \delta\lambda)} - \frac{c}{(\lambda_0 + \delta\lambda)} \cong \frac{2c\delta\lambda}{{\lambda_0}^2} \qquad (۳.۱۳۰)$$

$\delta\lambda$ پهنای طیفی مدوله‌سازی سیگنال است و مقدار آن در یک نرخ ضربان B برابر با $\delta\lambda \cong B{\lambda_0}^2/2c$ می‌باشد.

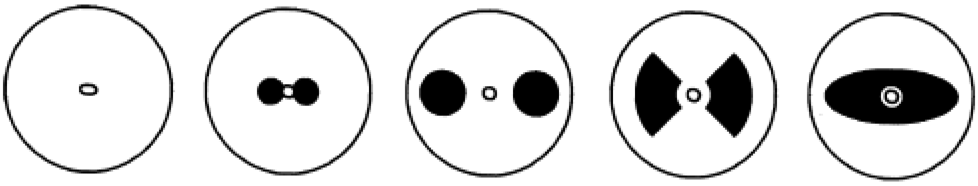
ـ پهن‌شدگی لیزر بزرگتر از مدوله‌شدن سیگنال : چون پهن‌شدگی طیفی $\delta\lambda$ (در رابطه $\delta t = \sigma L \delta\lambda$) با پهنای طیفی $\delta\lambda$ لیزر بدست می‌آید، رابطه B به صورت $\delta\lambda \cong 0.22/\sigma.\delta\lambda.L$ بیان می‌شود. پهنای باند یک فیبر چند مد، کوچکتر از فیبر تک مد است.

۱۰-۳ فیبرهای دوشکستی فیبر اپتیکی

۱-۱۰-۳ مدهای قطبیده متعامد در فیبرهای تک مد

در فیبر تک مد متقارن محوری، دو نوع مد قطبیده متعامد وجود دارد ($HE_{11}{}^x$ و $HE_{11}{}^y$). اگر ساختار موج‌برگونه فیبر، متقارن محوری باشد، این مدهای قطبیده متعامد دارای ثابت‌های انتشار یکسان هستند (به همین دلیل به آنها فیبر تک مد می‌گویند. در فیبرهای عملی، گرچه یک عدم تقارن محوری توسط تغییر شکل هسته یا خروج از مرکز هسته به سمت قطر بیرونی‌تر، باعث تفاوت جزئی در ثابت انتشار دو مد قطبش می‌شود، اما در چنین فیبرهایی، حالت قطبش نور خروجی به طور تصادفی تغییر می‌کند، چون جفت‌شدگی مد بین حالت‌های $HE_{11}{}^x$ و $HE_{11}{}^y$ اتفاق می‌افتد که ناشی از اختلال قطر هسته در امتداد جهت z ، ارتعاش و تغییرات دمایی است. بنابراین، چنین فیبرهایی نمی‌توانند برای کاربرد در حسگرهای فیبر نوری و در ارتباطات نوری منسجم که در آن حالت قطبش و اثرات تداخل مد وجود دارد، مورد استفاده قرار گیرد. برای حل این مشکلات، از فیبرهای دوشکستی استفاده می‌شود و تفاوت ثابت‌های انتشار بین مدهای $HE_{11}{}^x$ و $HE_{11}{}^y$ در فیبر دوشکستی بزرگ ساخته شده است (فیبرهای دوشکستی، فیبرهای نگهدارنده قطبش نیز هستند). هنگامی‌که مولفه‌های فرکانس یکسان در اختلالات طولی بعنوان تفاوت ثابت‌های انتشار $\boldsymbol{\delta\beta = \beta_x - \beta_y}$ بین دو مد وجود داشته باشد، جفت‌شدگی مد بین مدهای $HE_{11}{}^x$ و $HE_{11}{}^y$ ، رخ می‌دهد و قدرت جفت‌شدگی متناسب با مقدار مولفه فرکانس فضایی اختلال است. طیف توانی اختلالات برای مولفه‌های فرکانس فضایی کم، بالا است و به سرعت برای مولفه‌های فرکانسی فضای بالا، کاهش می‌یابد. اگر یک فیبر دو شکستی را که یک اختلاف ثابت انتشار بزرگ $\boldsymbol{\delta\beta}$ بین مدهای $HE_{11}{}^x$ و $HE_{11}{}^y$ دارد بسازیم، جفت‌شدگی مد کاهش می‌یابد، زیرا مولفه فرکانس فضایی اختلال با اندازه $\boldsymbol{\delta\beta}$ بسیار کم است. فیبرهای دوشکستی به دو دسته (دوشکستی نوع هندسی و دوشکستی ناشی از فشار(تنش)) تقسیم می‌شوند. در دوشکستی نوع هندسی، دوشکستی با هسته نامتقارن محوری یا ساختارهای مجاور هسته، تولید می‌شود و دوشکستی ناشی از فشار

توسط یک تنش نامتقارن در هسته است. در فیبرهای دوشکستی هندسی، اگر یک عدم متقارن محوری در ساختار موج‌بر وجود داشته باشد، توزیع تنش نامتقارن وجود دارد. بنابراین تشخیص دوشکستی هندسی فیبرها، مشکل است و می‌توان اختلاف ثابت‌های انتشار $\delta\beta$ با فشار ایجاد کرد. شکل ۶-۳، ساختارهای سطح مقطع عرضی از فیبرهای دوشکستی معمولی را نشان می‌دهد. الف و ب متعلق به دوشکستی هندسی است. تفاوت ثابت‌های انتشار $\boldsymbol{\delta\beta}$ بین مدهای ${HE_{11}}^{x}$ و ${HE_{11}}^{y}$ بوسیله یک تغییر شکل بیضوی هسته در الف و توسط پایین آوردن ضریب شکست هسته یا حفره‌های هوا در هر دو طرف هسته در ب ایجاد شده است. همچنین، پ، ت و ث متعلق به فیبر دوشکستی نوع تنش هستند. مناطق تاریک در این شکل‌ها نواحی تحت تنش است که در آنها شیشه‌های سیلیکای آغشته دارای ضرایب انبساط حرارتی بالا قرار می‌گیرند.



الف ب پ ت ث

شکل ۶-۳. ساختارهای مقطعی الیاف دوشکست معمولی: (الف) الیاف هسته بیضوی، (ب) الیاف جانبی یا تونل جانبی، (پ) فیبر پاندا، (ت) الیاف پاپیون، و (ث) فیبر ژاکت بیضوی.

وقتی نواحی تنش بعد از ساخت فیبر، خنک می‌شود، تنش زیادی به هسته اعمال می‌شود زیرا آنها به شدت کوچک می‌شوند. به طور کلی، یک نیروی کششی بزرگ در طول جهت محور x و نیروی فشاری در جهت جهت محور y تولید می‌شود ، زیرا بخش‌های تحت تنش در جهت x است. ضریب شکست شیشه تحت تنش با اثر فوتوالاستیک تغییر می کند بنابراین ضریب شکست هسته برای مدهای ${HE_{11}}^{x}$ و ${HE_{11}}^{y}$ به دلیل تفاوت درتنش در ناحیه هسته $\boldsymbol{y}$، متفاوت می‌شوند. دو شکستی معین به صورت اختلاف نرمالیزه ثابت‌های انتشار بین مدهای ${HE_{11}}^{x}$ و ${HE_{11}}^{y}$ به عدد موج تعریف می‌شود :

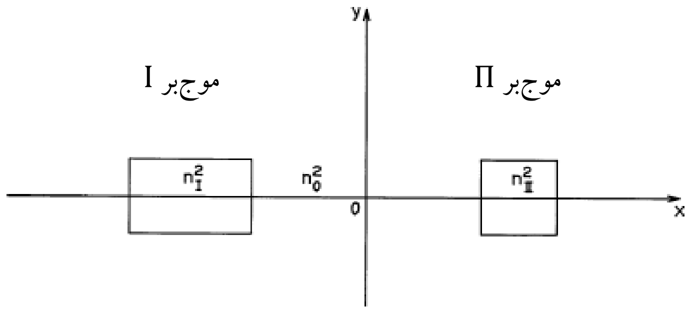
$$B = \frac{B_x - B_Y}{k} = \frac{2c\delta B}{k} \qquad (۳.۱۳۳)$$

فصل چهارم : نظریه جفت‌شدگی مدها

انتشار برهم‌کنش امواج نوری منتشر شونده دوتایی در موج‌برهای چین دار (موجی شکل) مجاور، موضوعی حیاتی در ساخت تجهیزات اپتیکی است. نظریه جفت‌شدگی مدها به برهم‌کنش دوتایی بین مدهای منتشر شونده می‌پردازد.

۱-۴. استخراج معادلات جفت‌شدگی مد بر پایه نظریه اختلال

در موج‌برهای اپتیکی یکپارچه محوری، تعداد زیادی از مدها وجود دارد. انتشار این مدها مختص هر موج‌بر است و در شرط تعامد بین مدها صدق می‌کند. مطابق شکل ۱-۴، اگر دو موج‌بر نزدیک هم قرار بگیرند، مدهای هر موج‌بر با یکدیگر جفت می‌شوند و تداخل می‌کنند. هنگامی‌که توزیع میدان الکترومغناطیسی بعد از جفت شدن مدها تفاوتی با قبل از جفت‌شدن نداشته باشد می‌توان با استفاده از نظریه جفت‌شدگی مدها آن را تجزیه و تحلیل نمود.



شکل ۱-۴. موج‌برهای نوری جفت‌شده جهت‌دار.

ویژه مدهای هر موج‌بر اپتیکی که در معادلات ماکسول صدق می‌کنند باید قبل از جفت شدن با $\widetilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{p}}, \widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{p}}\ (\mathrm{p}=1,2)$ مشخص شوند :

$$\begin{cases}\nabla\times\widetilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{p}}=-j\omega\mu_0\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{p}}\\ \nabla\times\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{p}}=j\omega\mu_0{N_0}^2\widetilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{p}}\end{cases}\qquad(۴.۱)$$

$N_p^2(x,y)$ نشان دهنده توزیع ضریب شکست هر موج‌بر است. اگر میدان الکترومغناطیسی موج‌بر جفت‌شده، مجموع ویژه مدهای هر موج‌بر باشد :

$$\begin{cases}\widetilde{\mathrm{E}}=A(z)\widetilde{\mathrm{E}}_1+B(z)\widetilde{\mathrm{E}}_2\\ \widetilde{\mathrm{H}}=A(z)\widetilde{\mathrm{H}}_1+B(z)\widetilde{\mathrm{H}}_2\end{cases}\qquad(۴.۲)$$

آنگاه میدان الکترومغناطیسی موج‌بر جفت‌شده $\tilde{E}_p$ و $\tilde{H}_p$ باید در معادلات ماکسول صدق کنند. با جایگزین کردن (۴.۲) در (۴.۱) داریم :

$$\begin{cases}\nabla\times\widetilde{\mathrm{E}}=-j\omega\mu_0\widetilde{\mathrm{H}}\\ \nabla\times\widetilde{\mathrm{H}}=j\omega\mu_0{N_0}^2\widetilde{\mathrm{E}}\end{cases}\qquad(۴.۳)$$

با استفاده از رابطه (۴.۱) و فرمول برداری $\nabla\times(\mathrm{AE})=\mathrm{A}\nabla\times\mathrm{E}+\nabla\mathrm{A}\times\mathrm{E}=\mathrm{A}\nabla\times\mathrm{E}+\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}}u_z\times\mathrm{E}$ به روابط زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases}(u_z\times\tilde{\mathrm{E}}_1)\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}}+(u_z\times\tilde{\mathrm{E}}_2)\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dz}}=0\\(u_z\times\tilde{\mathrm{H}}_1)\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}}-j\omega\varepsilon_0(N^2-{N_0}^2)\mathrm{A}\tilde{\mathrm{E}}_1+(u_z\times\tilde{\mathrm{H}}_2)\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dz}}-j\omega\varepsilon_0(N^2-{N_0}^2)\mathrm{B}\tilde{\mathrm{E}}_1=0\end{cases}\qquad (۴.۴)$$

$N^2(x,y)$، توزیع ضریب شکست در موج‌بر جفت شده است. با جایگزینی معادلات (۴.۴) در معادلات انتگرالی(۴.۵) و به معادلات (۴.۶) می‌رسیم :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\tilde{\mathrm{E}}_1{}^*.(u_z\times\tilde{\mathrm{H}}_1)\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}}-j\omega\varepsilon_0(N^2-{N_0}^2)\mathrm{A}\tilde{\mathrm{E}}_1+(u_z\times\tilde{\mathrm{H}}_2)\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dz}}-j\omega\varepsilon_0(N^2-{N_0}^2)\mathrm{B}\tilde{\mathrm{E}}_1$$

$$-\tilde{\mathrm{H}}_1{}^*.(u_z\times\tilde{\mathrm{E}}_1)\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}}+(u_z\times\tilde{\mathrm{E}}_2)\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dz}}]dx\,dy=0\qquad (۴.۵ \text{ الف})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\tilde{\mathrm{E}}_2{}^*.(u_z\times\tilde{\mathrm{H}}_1)\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}}-j\omega\varepsilon_0(N^2-{N_0}^2)\mathrm{A}\tilde{\mathrm{E}}_1+(u_z\times\tilde{\mathrm{H}}_2)\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dz}}-j\omega\varepsilon_0(N^2-{N_0}^2)\mathrm{B}\tilde{\mathrm{E}}_1$$

$$-\tilde{\mathrm{H}}_2{}^*.(u_z\times\tilde{\mathrm{E}}_1)\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}}+(u_z\times\tilde{\mathrm{E}}_2)\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dz}}]dx\,dy=0\qquad (۴.۵ \text{ ب})$$

$$\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}}+\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dz}}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u_z.(\tilde{\mathrm{E}}_1{}^*\times\tilde{\mathrm{H}}_2+\tilde{\mathrm{E}}_2\times\tilde{\mathrm{H}}_1{}^*)dx\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u_z.(\tilde{\mathrm{E}}_1{}^*\times\tilde{\mathrm{H}}_1+\tilde{\mathrm{E}}_1\times\tilde{\mathrm{H}}_1{}^*)dx\,dy}+jA\frac{\omega\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(N^2-{N_1}^2)\tilde{\mathrm{E}}_1{}^*.\tilde{\mathrm{E}}_1dx\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u_z.(\tilde{\mathrm{E}}_1{}^*\times\tilde{\mathrm{H}}_1+\tilde{\mathrm{E}}_1\times\tilde{\mathrm{H}}_1{}^*)dx\,dy}+$$

$$jB\frac{\omega\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(N^2-{N_2}^2)\tilde{\mathrm{E}}_1{}^*.\tilde{\mathrm{E}}_2\,dx\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u_z.(\tilde{\mathrm{E}}_1{}^*\times\tilde{\mathrm{H}}_1+\tilde{\mathrm{E}}_1\times\tilde{\mathrm{H}}_1{}^*)dx\,dy}=0\qquad (۴.۶ \text{ الف})$$

$$\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dz}}+\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u_z.(\tilde{\mathrm{E}}_2{}^*\times\tilde{\mathrm{H}}_1+\tilde{\mathrm{E}}_1\times\tilde{\mathrm{H}}_2{}^*)dx\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u_z.(\tilde{\mathrm{E}}_1{}^*\times\tilde{\mathrm{H}}_1+\tilde{\mathrm{E}}_1\times\tilde{\mathrm{H}}_2{}^*)dx\,dy}+jA\frac{\omega\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(N^2-{N_1}^2)\tilde{\mathrm{E}}_2{}^*.\tilde{\mathrm{E}}_1dx\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u_z.(\tilde{\mathrm{E}}_2{}^*\times\tilde{\mathrm{H}}_2+\tilde{\mathrm{E}}_2\times\tilde{\mathrm{H}}_2{}^*)dx\,dy}+$$

$$jB\frac{\omega\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(N^2-{N_2}^2)\tilde{\mathrm{E}}_2{}^*.\tilde{\mathrm{E}}_2\,dx\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u_z.(\tilde{\mathrm{E}}_2{}^*\times\tilde{\mathrm{H}}_2+\tilde{\mathrm{E}}_2\times\tilde{\mathrm{H}}_2{}^*)dx\,dy}=0\qquad (۴.۶ \text{ ب})$$

وابستگی‌های عرضی و محوری میدان‌های الکترومغناطیسی به صورت زیر تفکیک می‌شود :

$$\begin{cases}\tilde{\mathrm{E}}_p=\mathrm{E}_p\,exp(-jBz)\\\tilde{\mathrm{H}}_p=\mathrm{H}_p\,exp(-jBz)\end{cases}\qquad (P=1,2)\qquad (۴.۷)$$

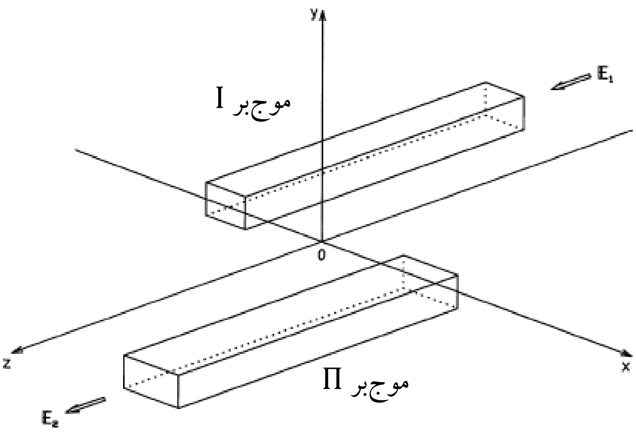
با جایگزینی معادله (۴.۷) در (۴.۵) و (۴.۶) ، داریم :

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}}+\mathrm{c}_{12}\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dz}}\exp[-j(B_2-B_1)z]+j\chi_1A+j\mathrm{k}_{12}B\exp[-j(B_2-B_1)z]=0\\\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dz}}+\mathrm{c}_{21}\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}}\exp[-j(B_2-B_1)z]+j\chi_1B+j\mathrm{k}_{21}B\exp[-j(B_2-B_1)z]=0\end{cases}\qquad (۴.۸)$$

ضرایب معادله (۴.۸) برابر است با :

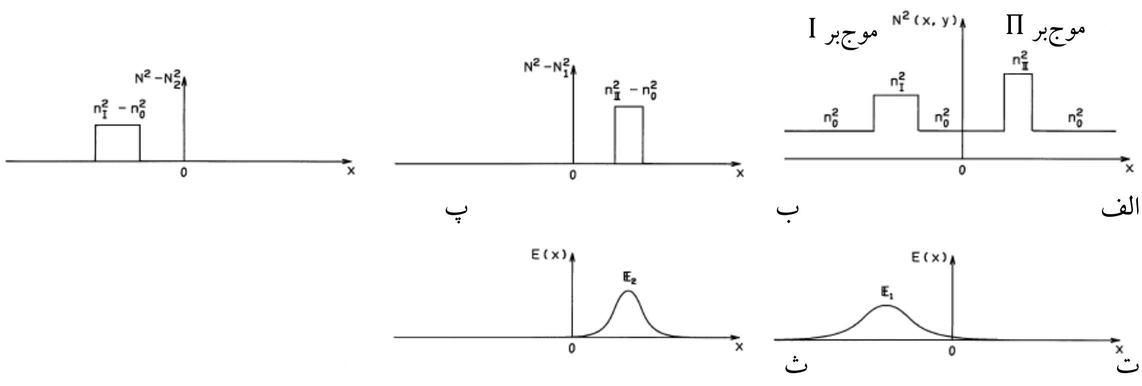
$$\begin{cases} \mathrm{k}_{pq} = \dfrac{\omega\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(N^2-N_q{}^2)\mathrm{E}_p{}^*.\mathrm{E}_q dx\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_z.(\mathrm{E}_p{}^*\times\mathrm{H}_p+\mathrm{E}_p\times\mathrm{H}_p{}^*)dx\,dy} \\ c_{pq} = \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_z.(\mathrm{E}_p{}^*\times\mathrm{H}_q+\mathrm{E}_p\times\mathrm{H}_q{}^*)dx\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_z.(\mathrm{E}_p{}^*\times\mathrm{H}_p+\mathrm{E}_p\times\mathrm{H}_p{}^*)dx\,dy} \\ \chi_p = \dfrac{\omega\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(N^2-N_p{}^2)\mathrm{E}_p{}^*.\mathrm{E}_p dx\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_z.(\mathrm{E}_p{}^*\times\mathrm{H}_p+\mathrm{E}_p\times\mathrm{H}_p{}^*)dx\,dy} \end{cases} \qquad (p,q) = (1,2) \text{ یا } (2,1) \qquad (۴.۹)$$

κ_{pq} ضریب جفت‌شدگی مد جفت‌شونده جهت‌دار است. همچنیم مطابق شکل ۲-۴، موجبر I در ناحیه $z < 0$ و موجبر II در ناحیه $z \geq 0$ وجود دارد. هنگامی که ویژه مدهای $(\mathrm{E}_1, \mathrm{H}_1)$ در موجبر I از جهت منفی z به $z = 0$ انتشار می‌یابند، میدان الکترومغناطیسی ناحیه غلاف، ویژه مدهای $(\mathrm{E}_2, \mathrm{H}_2)$ در نقطه $z = 0$ را برانگیخته می‌کند. این برانگیختگی در c_{12} در نظر گرفته می‌شود. بنابراین c_{pq} نشان‌دهنده ضریب جفت‌شدگی انتهایی بین دو موجبر است.



شکل ۲-۴. c_{pq} ضریب جفت‌شدگی انتهایی بین دو موجبر

مطابق شکل ۳-۴ با مقایسه اندازه χ_p و κ_{pq} (در حالت $p = 1$ و $q = 2$)، مقدار واقعی $(N^2 - N_2^2)$ در موجبر I برابر با $(n_1^2 - n_0^2)$ است و در نواحی دیگر، صفر است. انتگرال κ_{12} فقط در داخل هسته موجبر I گرفته می‌شود. میدان الکتریکی E_2 در داخل موجبر I ($|E_2| = \eta|E_1|$) در مقایسه با E_1، خیلی کوچک است. بنابراین اندازه انتگرال κ_{12} در شمارنده در حدود $(n_1^2 - n_0^2)\eta$ است.



شکل ۳-۴. توزیع ضریب شکست موجبرهای جفت‌شده، تفاوت توزیع‌های ضریب شکست و میدان الکتریکی

انتگرال χ_1 در χ_p فقط در سطح مقطع موجبر II گرفته می‌شود و $(N^2 - N_1^2)$ صفر نیست. اندازه جمله انتگرالی χ_1 در شمارنده در حدود $(n_1^2 - n_0^2)\eta^2$ است، زیرا شدت میدان الکتریکی E_1 در موجبر II برابر با η است، یعنی χ_p،η برابر کوچکتر از κ_{pq} است. بنابراین هنگامی که دو موجبر به اندازه کافی از هم دورند و $1 \gg \eta$ برقرار است، می‌توان از χ_p صرف‌نظر کرد چون χ_p خیلی کوچکتر از κ_{pq} است. اما هنگامی که دو موجبر خیلی به هم نزدیکند، نمی‌توان از χ_p صرف‌نظر کرد. توان اپتیکی حمل‌شده با ویژه مد در موجبر p برابر است با :

$$P_p = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{E}_p \times \mathrm{H}_p{}^*\right).u_z dx\, dy \qquad (۴.۱۰)$$

معادله(۴.۱۰) بیانگر آن است که دریافت مخرج معادلات(۴.۹) برابر با $4P_p$ است، پس ویژه مدها در دو موجبر نرمالیزه با شرط زیر هستند :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{E}_p{}^* \times \mathrm{H}_p + \mathrm{E}_p \times \mathrm{H}_p{}^*).u_z dx\, dy = 4P_p = 1 \qquad (۴.۱۱)$$

سپس از معادلات (۴.۹) به $c_{21} = c_{12}{}^*$ و $\chi_p = \chi_p{}^*$ می‌رسیم و اختلاف ثابت انتشار موجبرهای I و II برابر با $\delta = (B_2 - B_1)/2$ می‌شوند. توان اپتیکی در سراسر موجبر جفت‌شده برابر است با :

$$P = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\widetilde{\mathrm{E}} \times \widetilde{\mathrm{H}}^*\right).u_z dx\, dy \qquad (۴.۱۲)$$

با جایگزینی معادلات (۴.۲) و (۴.۷) در معادله (۴.۱۲) ، داریم :

$$P = \frac{1}{2}|\mathrm{A}|^2 + |\mathrm{A}|^2 + \mathrm{A}^*\mathrm{B}^*\mathrm{c}_{12}\exp(-j2\delta z) + \mathrm{A}^*\mathrm{B}^*\mathrm{c}_{12}\exp(j2\delta z) \qquad (۴.۱۳)$$

در موجبرهای بدون افت، توان اپتیکی در موجبر ثابت می‌ماند $(\mathrm{dp/dz} = 0)$. با جایگزینی روابط(۴.۸) و (۴.۱۲) در (۴.۱۳) داریم :

$$j\mathrm{A}^*\mathrm{B}^*(\mathrm{k}_{12}{}^* - \mathrm{k}_{12} - 2\delta\mathrm{c}_{12})\exp(-j2\delta z) - j\mathrm{A}^*\mathrm{B}^*(-\mathrm{k}_{12} - \mathrm{k}_{12}{}^* - 2\delta\mathrm{c}_{12}{}^*)\exp(j2\delta z) \quad (۴.۱۴)$$

برای آنکه معادله (۴.۱۴) مستقل از z باشد، باید $\mathrm{k}_{12} = \mathrm{k}_{12}{}^* + 2\delta\mathrm{c}_{12}{}^*$ باشد. رابطه متقابل ضرایب جفت‌شدگی با رابطه $\kappa_{21} = \kappa_{12}^*$ بیان می‌شود زیرا c_{12} برابر با صفر می‌شود. البته $\kappa_{21} = \kappa_{12}^*$ هنگامی برقرار است که ثابت انتشار دو موجبر معادل باشد $\delta = 0$ یا دو موجبر به اندازه کافی از هم دور باشند $(c_{12} \cong 0)$. هنگامی که دو موجبر متفاوت با ابعاد هندسی سطح مقطع متفاوت در نزدیکی یکدیگر قرار گیرند، نمی‌توان از $2\delta\mathrm{c}_{12}{}^*$ صرف‌نظر کرد. پس معادلات جفت‌شدگی مد از معادلات (۴.۸) بدست می‌آیند :

$$\begin{cases} \mathrm{k}_a = \frac{\kappa_{12}-\mathrm{c}_{12}\chi_2}{1-|\mathrm{c}_{12}|^2} \\ \mathrm{k}_b = \frac{\kappa_{12}-\mathrm{c}_{12}{}^{*}\chi_1}{1-|\mathrm{c}_{12}|^2} \\ \mathrm{k}_a = \frac{\kappa_{21}\mathrm{c}_{12}-\chi_1}{1-|\mathrm{c}_{12}|^2} \\ \mathrm{k}_b = \frac{\kappa_{12}\mathrm{c}_{12}{}^{*}-\chi_2}{1-|\mathrm{c}_{12}|^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}} = -j\mathrm{k}_a B\ \exp(-j2\delta z) + ja_a A \\ \frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}} = -j\mathrm{k}_b A\ \exp(j2\delta z) + ja_b B \end{cases} \tag{۴.۱۵}$$

با فرض $c_{pq} = \chi_p = 0$ معادلات (۴.۱۵) برابر خواهند بود با :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}} = -j\mathrm{k}_{12} B\ exp[-j(B_2 - B_1)z] \\ \frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dz}} = -j\mathrm{k}_{21} A\ \exp[j(B_2 - B_1)z] \end{cases} \tag{۴.۱۶}$$

رابطه متقابل ضرایب جفت‌شدگی برابر با $\mathrm{k}_{12} = \mathrm{k}_{21}$ می‌باشد و در اکثر جفت‌شونده‌های جهتی، κ_{pq} حقیقی است. بنابراین $\kappa_{12} = \kappa_{21} = \kappa$ است. رابطه متقابل برای جفت‌شونده‌های جهتی با رابطه $\mathrm{k}_{12} = \mathrm{k}_{21}{}^{*}$ بیان می‌شود.

۴-۲. جفت‌شونده‌های جهتی

حل معادله جفت‌شونده‌های جهتی $(\beta_1 > 0,\ \ \beta_2 > 0)$ به شکل زیر بیان می‌شود :

$$\begin{cases} \mathrm{A(z)} = [a_1 e^{jqz} + a_2 e^{-jqz}]\ \exp(-j\delta z) \\ \mathrm{B(z)} = [b_1 e^{jqz} + b_2 e^{-jqz}]\ \exp(j\delta z) \end{cases} \tag{۴.۱۷}$$

پارامتر مجهول q باید تعیین شود و ثابت‌های a_1، a_2، b_1 و b_2 باید در شرط اولیه صدق کنند:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \mathrm{A}(0) \\ b_1 + b_2 = \mathrm{B}(0) \end{cases} \tag{۴.۱۸}$$

با جایگزینی معادلات (۴.۱۷) در معادلات (۴.۱۶) و بکارگیری شرایط اولیه معادلات (۴.۱۸) ، داریم :

$$\begin{cases} \mathrm{A(z)} = \left\{\left[\cos(qz) + j\frac{\delta}{q}\sin(qz)\right]\mathrm{A}(0) - \mathrm{J}\frac{k}{q}\sin(qz)\mathrm{B}(0)\right\}\exp(-j\delta z) \\ \mathrm{B(z)} = \left\{-\mathrm{J}\frac{k}{q}\sin(qz)\mathrm{A}(0) + \left[\cos(qz) - j\frac{\delta}{q}\sin(qz)\right]\mathrm{B}(0)\right\}\exp(j\delta z) \end{cases} \tag{۴.۱۹}$$

در اینجا $q = \sqrt{k^2 + \delta^2}$ می‌باشد. در اغلب موارد، نور فقط به موجبر جفت‌شونده I در $z = 0$ وارد می‌شود و شرط $\mathrm{A}(0) = \mathrm{A}_0$ و $\mathrm{B}(0) = 0$ برقرار است. پس توان اپتیکی جریان یافته در راستای z از روابط زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \mathrm{P}_a(\mathrm{z}) = \frac{|\mathrm{A(z)}|^2}{|\mathrm{A}_0|^2} = 1 - F\sin^2(qz) \\ \mathrm{P}_b(\mathrm{z}) = \frac{|\mathrm{B(z)}|^2}{|\mathrm{A}_0|^2} = F\sin^2(qz) \end{cases} \tag{۴.۲۰}$$

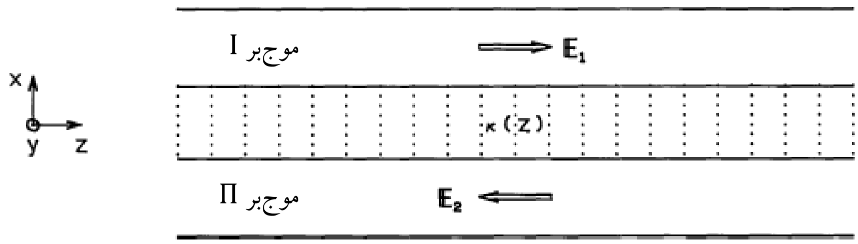
در اینجا F ماکزیمم توان جفت‌شدگی موثر است که با رابطه زیر $F = (k2q)^2 = 1/1 + (\delta/k)^2$ تعریف خواهد شد. ضریب جفت‌شدگی موثر از موجبر برانگیخته‌شده I به II در فاصله $z = (2m+1)\ \pi/2q$، به ماکزیمم مقدار خود

می‌رسد. طول z در $m = 0$، طول جفت‌شدگی است و توسط رابطه $z = \pi/2q = \pi/2\sqrt{k^2 + \delta^2}$ بدست می‌آید. هنگامی که ثابت‌های انتشار دو موجبر، معادل باشند($\beta_1 = \beta_2$ و $\delta = 0$) آنگاه ۱۰۰ درصد جفت‌شدگی توان، اتفاق می‌افتد و طول جفت‌شدگی برابر با $L_c = \pi/2k$ می‌باشد.

۴-۳. جفت‌شدگی خلاف جهت در موجبرهای چین‌دار(موجی شکل)

۴-۳-۱. خصوصیات انتقال و بازتاب در توری‌های یک شکل

هنگامی که جهت انتشار نور در خلاف هم باشد $(\beta_1 > 0\ ,\ \beta_2 < 0)$ جفت‌شدگی با نزدیک کردن موجبرهای I و II بدست نمی‌آید. مطابق شکل۴-۴، یک ساختار جفت‌شونده وجود دارد که محیط ضریب شکست موثر بین موجبرهای I و II، بطور متناوب اختلالی است.



شکل ۴-۴. موجبرهای جفت‌شده خلاف جهت هم.

اگر ضریب جفت‌شدگی با رابطه $\kappa_{12}(z) = \kappa_G exp[-j(2\pi/\Lambda)z]$ بیان شود (Λ دوره تناوب اختلال است) و از روابط $\kappa_{21} = -\kappa_{12}{}^* = -\kappa_G exp(jz\ 2\pi/\Lambda)$ استفاده کنیم، آنگاه معادلات جفت‌شدگی (۴.۱۶) به روابط زیر تبدیل می‌شوند :

$$\begin{cases} \frac{dA}{dz} = -jk_G B\ exp[-j\left(B_1 - B_2 - \frac{2\pi}{\Lambda}\right)z] \\ \frac{dA}{dz} = -jk_G A\ \exp\left[j\left(B_1 - B_2 - \frac{2\pi}{\Lambda}\right)z\right] \end{cases} \qquad (۴.۲۱)$$

این رابطه از نظریه پایستگی توان $P \propto |A|^2 - |B|^2$ منتشرشونده در راستای z بدست آمد و پارامتر $\left(\varphi = \frac{B_1 - B_2 - 2\pi/\Lambda}{2}\right)$ بیانگر شرط هم‌فازی است. اختلال متناوب در فاصله $z = 0 - L$ وجود دارد و شرایط مرزی اولیه برای نور ورودی به موجبر I با رابطه $A(0) = A_0$ و $B(L) = 0$ بیان می‌شود (انعکاس نور در $z = L$، صفر است زیرا هیچ اختلالی در $z < L$ وجود ندارد). تحت این شرایط ، حل معادلات جفت‌شدگی (۴.۲۱) برای شرط هم‌فازی، برابر خواهند بود با :

$: |\varphi| > k_G$

$$\begin{cases} A(z) = A_0 \frac{\rho\cos[\rho(z-L)] + j\varphi\sin[\rho(z-L)]}{\rho\cos(\rho L) + j\varphi\sin(\rho L)} \exp(j\varphi z) \\ B(z) = A_0 \frac{jk_G \sin[\rho(z-L)]}{\rho\cos(\rho L) + j\varphi\sin(\rho L)} \exp(-j\varphi z) \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{\varphi^2 - k_G{}^2} \qquad (۴.۲۲)$$

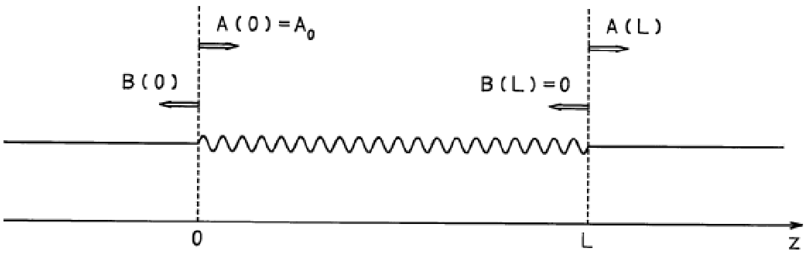
$: |\varphi| = k_G$

$$\begin{cases} A(z) = A_0 \frac{1-j\varphi(z-L)}{1+j\varphi L} \exp(j\varphi z) \\ B(z) = A_0 \frac{jk_G(z-L)}{1+j\varphi L} \exp(-j\varphi z) \end{cases} \quad (۴.۲۳)$$

$: |\varphi| < k_G$

$$\begin{cases} A(z) = A_0 \frac{\alpha \cosh[\alpha(z-L)] + j\varphi \sinh[\alpha(z-L)]}{\alpha \cosh(\alpha L) + j\varphi \sinh(\alpha L)} \exp(j\varphi z) \\ B(z) = A_0 \frac{jk_G \sinh[\alpha(z-L)]}{\alpha \cosh(\alpha L) + j\varphi \sinh(\alpha L)} \exp(-j\varphi z) \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{{k_G}^2 - \varphi^2} \quad (۴.۲۴)$$

مطابق شکل ۵-۴، موج‌بر براگ مهم‌ترین ابزار اپتیکی مورد استفاده جفت‌شونده‌های خلاف جهت هم است و ضریب شکست هسته یا غلاف (شامل ضریب شکست اختلالی با ساختار هندسی چین‌دار) بطور متناوب دارای اختلال است. موج‌برهای براگ از اجزای اساسی لیزرهای پسخوراند توزیعی و منعکس‌کننده‌های توزیعی براگ می‌باشد و ثابت‌های انتشارشان، اندازه یکسان و علامت مخالف هم دارند، زیرا موج‌برهای I و II ، یکی هستند $(B_1 = -B_2 = kn_{eff})$.



شکل ۵-۴. موج‌بر اپتیکی براگ.

n_{eff} نشان‌دهنده ضریب شکست موثر است و شرط هم فازی φ برابر با $\varphi = kn_{eff} - \pi/\Lambda$ می‌باشد. توان اپتیکی نرمالیزه عبوری و انعکاسی در موج‌برهای توری براگ برابر است با :

$: |\varphi| > k_G$

$$\begin{cases} P_f(z) = \frac{|A(z)|^2}{|A_0|^2} = \frac{\rho^2 + {k_G}^2 \sin^2[\rho(z-L)]}{\rho^2 + {k_G}^2 \sin^2(\rho L)} \\ P_b(z) = \frac{|B(z)|^2}{|A_0|^2} = \frac{{k_G}^2 \sin^2[\rho(z-L)]}{\rho^2 + {k_G}^2 \sin^2(\rho L)} \end{cases} \quad (۴.۲۵)$$

$: |\varphi| = k_G$

$$\begin{cases} P_f(z) = \frac{|A(z)|^2}{|A_0|^2} = \frac{1 + {k_G}^2 (z-L)^2}{1 + {k_G}^2 L^2} \\ P_b(z) = \frac{|B(z)|^2}{|A_0|^2} = \frac{{k_G}^2 (z-L)^2}{1 + {k_G}^2 L} \end{cases} \quad (۴.۲۶)$$

$: |\varphi| < k_G$

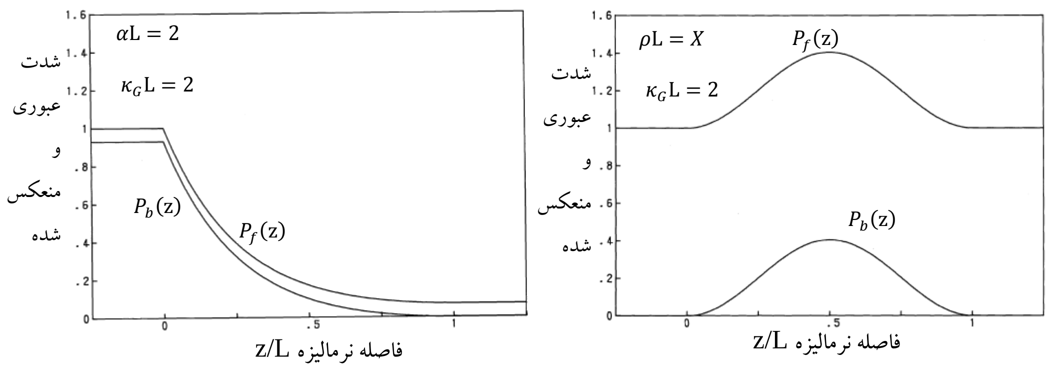
$$\begin{cases} P_f(z) = \frac{|A(z)|^2}{|A_0|^2} = \frac{\alpha^2 + k_G{}^2 \sinh^2[\alpha(z-L)]}{\alpha^2 + k_G{}^2 \sinh^2(\alpha L)} \\ P_b(z) = \frac{|B(z)|^2}{|A_0|^2} = \frac{k_G{}^2 \sinh^2[\alpha(z-L)]}{\alpha^2 + k_G{}^2 \sinh^2(\alpha L)} \end{cases} \quad (۴.۲۷)$$

شکل ۶-۴، توان اپتیکی نرمالیزه پیش‌رو و پس‌رو در موج‌برهای براگ در دو حالت شرط هم فازی مختلف $\rho = \pi/L,\ \kappa_G = 2/L\ (|\varphi| > \kappa_G)$ (الف) و $\alpha = \kappa_G = 2/L\ (|\varphi| = 0)$ (ب) را نشان می‌دهد. مطابق شکل ۶-۴ الف، هنگامی که $|\varphi| > \kappa_G$ باشد، موج فرودی از جهت مخالف موج‌بر براگ عبور می‌کند. فرکانس‌های زاویه‌ای موج اپتیکی که این شرط را برآورده می‌سازند، برابرند با :

$$\begin{cases} \frac{\omega}{c} n_{eff} < \frac{\pi}{\Lambda} - k_G \\ \frac{\omega}{c} n_{eff} > \frac{\pi}{\Lambda} - k_G \end{cases} \quad (۴.۲۸)$$

به این گستره فرکانسی باند عبور می‌گویند. مطابق شکل ۶-۴ ب، هنگامی که $|\varphi| < \kappa_G$ باشد، بطور نمایی و به عقب منکس می‌شود. این گستره فرکانسی را باند توقف می‌گویند :

$$\frac{\pi}{\Lambda} - k_G < \frac{\omega}{c} n_{eff} > \frac{\pi}{\Lambda} + k_G \quad (۴.۲۹)$$



شکل ۶-۴. توان اپتیکی نرمالیزه پیش‌رو و پس‌رو در موج‌برهای براگ.

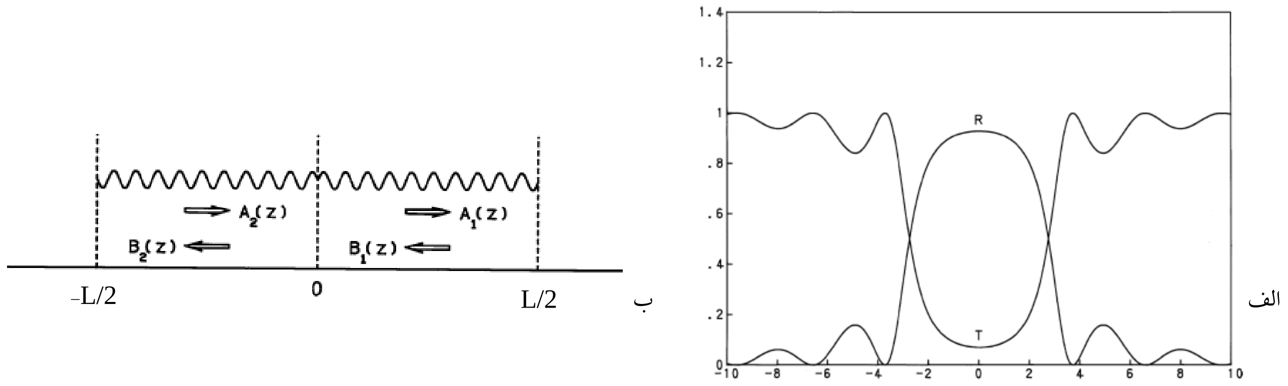
طول موج اپتیکی که در شرط $(\omega/c)n_{eff} = \pi/\Lambda$ را طول موج براگ می‌گویند که برابر با $\lambda_B = 2n_{eff}\Lambda$ می‌باشد. موج‌بر براگ برای طول موج‌های نزدیک به طول موج براگ به عنوان یک فیلتر حذف‌کننده، عمل می‌کند و برای طول موج‌های دور از طول موج براگ به عنوان یک فیلتر عبوری، عمل می‌کند. مطابق شکل ۷-۴ الف، خصوصیات عبور و انتقال موج‌بر براگ با $\kappa_G L = 2$ دارای محور افقی $\varphi L = (\omega - \omega_B) n_{eff} L/c$ با فرم تغییر یافته از فرکانس زاویه‌ای براگ $\omega_B = (2\pi/\lambda_B)c$ است. عبور R و انعکاس T از روابط زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} T = \frac{|A(L)|^2}{|A_0|^2} \\ R = \frac{|B(0)|^2}{|A_0|^2} \end{cases} \quad (۴.۳۰)$$

انعکاس R از معادلات (۴.۲۵) - (۴.۲۷) بصورت زیر بدست می‌آیند :

$$\begin{cases} R = \dfrac{\left(\frac{k_G}{\rho}\right)^2 \sin^2(\rho L)}{1+\left(\frac{k_G}{\rho}\right)^2 \sin^2(\rho L)} & \dfrac{(\omega-\omega_B)n_{eff}}{c} > k_G \\ R = \dfrac{\left(\frac{k_G}{L}\right)^2}{1+\left(\frac{k_G}{L}\right)^2} & \dfrac{(\omega-\omega_B)n_{eff}}{c} = k_G \\ R = \dfrac{\left(\frac{k_G}{\alpha}\right)^2 \sinh^2(\rho L)}{1+\left(\frac{k_G}{\rho}\right)^2 \sinh^2(\rho L)} & \dfrac{(\omega-\omega_B)n_{eff}}{c} < k_G \end{cases} \qquad (۴.۳۱)$$

عبور T برابر با رابطه $T = 1 - R$ می‌باشد. انعکاس در طول موج براگ λ_B (فرکانس زاویه‌ای $\omega = \omega_B$) با قرار دادن $\alpha = \kappa_G$ در رابطه سوم (۴.۳۱) بدست می‌آید، یعنی $R = \tanh^2(k_G L)$.



شکل ۷-۴. الف. عبور و انتقال موجبر براگ. ب. موجبر براگ شیفت فازی.

۲-۳-۴. توری شیفت فازی

فاز منعکس‌شده از موجبر براگ در کاربردهای لیزری DFB و DBR، بسیار مهم است و مطابق شکل ۷-۴ ب، اندازه انعکاس موجبر براگ در $z = 0$ برابر با $r = B(0)/A_0 = \sqrt{R}e^{-j\theta}$ می‌باشد. فاز اپتیکی θ در طول موج نزدیک به طول موج براگ برابر با $\theta = \pi/2 + tan^{-1}[\tanh(\alpha L)\ \varphi/\alpha]$ می‌باشد. در مرکز طول موج براگ $(\varphi = 0)$ ،داریم $\theta = \pi/2$. مطابق شکل ۸-۴، اگر ساختار لیزر شامل دو موجبر براگ باشد، تغییرات فاز نهایی یک دور کامل در طول موج براگ با رابطه $\varphi = 2 \times \pi/2 = \pi$ داده می‌شود و شرط هم فازی (تغییرات فاز یک دور چرخش کامل مضرب صحیحی از 2π) در ساختار عادی لیزر DFB برآورده نمی‌شود و شرط هم فازی برای دو طول موج مجزا بدست می‌آید. این دو پیک، دو نوسان طیفی ایجاد می‌کنند و هنگامی که از چشمه نوری فیبر اپتیکی استفاده شود، باعث تغییر خصوصیات سیگنال عبوری می‌شود. اگر موجبرهای براگ دارای شیفت فازی 2Θ در $z = 0$ باشند، معادلات جفت‌شدگی برای دو موجبر براگ برابر است با :

$$\begin{cases} \dfrac{dA_\ell}{dz} = -jk_G B_\ell \exp(j2\varphi z \pm j\Theta) \\ \dfrac{dB_\ell}{dz} = -jk_G A_\ell \exp(-j2\varphi z \mp j\Theta) \end{cases} \qquad \ell = (1,2) \qquad (۴.۳۲)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dz}\left[A_\ell \exp\left(\mp\frac{j\Theta}{2}\right)\right] = -jk_G\left[B_\ell \exp(\pm\frac{j\Theta}{2})\right]\exp(j2\varphi z) \\ \frac{d}{dz}\left[B_\ell \exp(\pm\frac{j\Theta}{2})\right] = jk_G\left[A_\ell \exp(\mp\frac{j\Theta}{2})\right]\exp(-j2\varphi z) \end{cases} \quad (۴.۳۳)$$

همچنین می‌توان شیفت فازی موجبر براگ را با معادله (۴.۲۱) البته با این تفاوت که $A \rightarrow A_\ell \exp(\mp j\Theta/2)$ و $B \rightarrow B_\ell \exp(\mp j\Theta/2)$ است، بررسی کرد. اندازه ضریب انعکاس r_1 (مربوط به موجبر سمت راست براگ) و اندازه ضریب انعکاس r_2 (مربوط به موجبر براگ سمت چپ) به صورت زیر بیان می‌شود :

$$\sqrt{R}e^{-j\theta} = \frac{B_1(0)\exp(\frac{j\Theta}{2})}{A_1(0)\exp(-\frac{j\Theta}{2})} = \frac{B_1(0)}{A_1(0)}exp(j\Theta) \rightarrow \quad \begin{cases} r_1 = \frac{B_1(0)}{A_1(0)} = \sqrt{R}e^{-j(\theta+\Theta)} \\ r_2 = \frac{A_1(0)}{B_1(0)} = \sqrt{R}e^{-j(\theta+\Theta)} \end{cases} \quad (۴.۳۴)$$

تغییرات فاز نهایی برای یک دور چرخش در موجبر براگ برابر با رابطه زیر می‌باشد :

$$\psi = 2(\theta + \Theta) = \pi + 2\Theta + 2tan^1[\frac{\varphi}{\alpha}\tanh(\frac{\alpha L}{2})] \quad (۴.۳۵)$$

تغییر فازی در مرکز طول موجبر براگ $(\varphi = 0)$ برابر با $\psi = \pi + 2\Theta$ می‌باشد و هنگامی که تغییرات فازی توری براگ $\Theta = \pi/2$ است، تغییرات فاز اپتیکی در مرکز طول موج براگ برابر با $\psi = 2\pi$ می‌شود و شرط هم فازی برآورده می‌شود.تغییرات فازی توری $2\Theta = \pi$ مربوط به دوره تناوب $\Lambda/2$ توری و همچنین مربوط به یک چهارم طول موج λ_B/n_{eff} در داخل موجبر است. بنابراین تغییرات فازی توری $2\Theta = \pi$ بنام $\lambda/4$ (شیفت $\lambda/4$) بیان می‌شود.

۴-۴. استخراج ضرایب جفت‌شدگی

ضریب شکست مد κ برای محاسبه طول جفت‌شدگی در جفت‌شونده‌های جهتی، در جفت‌شونده‌های خلاف جهت و... بسیار مهم است.

۱-۴-۴. ضرایب جفت‌شدگی موجبرهای صفحه‌ای

برای تحلیل ضریب جفت‌شدگی مد TE در جفت‌شونده‌های جهتی شامل موجبرهای صفحه‌ای متقارن از ضریب جفت‌شدگی $\kappa(= \kappa_{12} = \kappa_{21})$ در معادله (۴.۱۵) استفاده می کنیم :

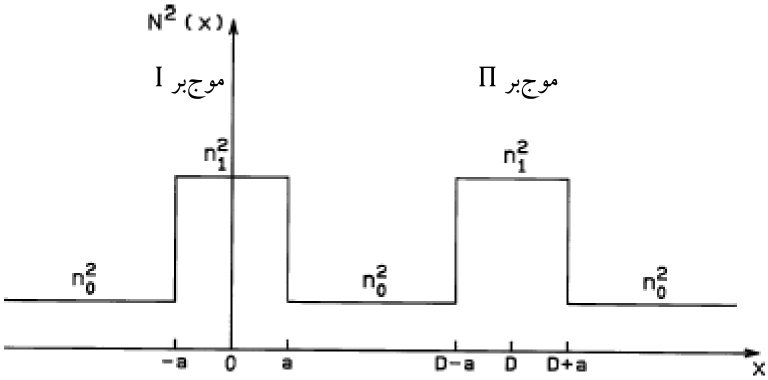
$$k = \frac{\omega\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty}(N^2 - {N_2}^2){E_1}^*.E_2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} u_z.({E_1}^* \times H_1 + E_1 \times {H_1}^*)dx} \quad (۴.۳۶)$$

مولفه‌های میدان الکترومغناطیسی مد TE از معادله(۲.۵) بصورت $E_x = H_y = 0$ و $H_x = -(\beta/\omega\mu_0)E_y$ بدست می‌آید :

$$\begin{cases} u_z.({E_1}^* \times H_1 + E_1 \times {H_1}^*) = \frac{2\beta}{\omega\mu_0}\left|E_{1y}\right|^2 \\ {E_1}^*.E_2 = {E_{1y}}^*.E_{2y} \end{cases} \quad (۴.۳۷)$$

انتگرال‌گیری معادله(۴.۳۶) فقط در داخل موجبر I ، گرفته می‌شود، چون $(N^2 - N_2^2)$ در خارج از موجبرا I ، صفر است.مطابق شکل ۸-۴، مبدا محورx در مرکز موجبرI است و فاصله بین مراکز دو هسته،D است. با جایگزینی معادله (۴.۳۷) در معادله (۴.۳۶) داریم :

$$k = \frac{\omega\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty}({n_1}^2 - {n_0}^2)\mathrm{E}_{1y}{}^{*}.\mathrm{E}_{2y}\mathrm{dx}}{\frac{2\beta}{\omega\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{E}_{1y}\right|^2\mathrm{dx}} \tag{۴.۳۸}$$



شکل ۸-۴. جفت‌کننده جهت‌دار متشکل از موجبرهای نوری صفحه‌ای.

مولفه‌های میدان الکتریکی در موجبر صفحه‌ای از معادلات (۲.۷) به صورت بیان می‌شود :

$$\mathrm{E}_{1y} = \begin{cases} A\cos\left(\frac{u}{a}x\right) & (|x| \le a) \\ A\cos(u)\exp\left[-\frac{\omega}{a}(|x| - a)\right] & (|x| > a) \end{cases} \tag{۴.۳۹ الف}$$

$$\mathrm{E}_{2y} = A\cos(u)\exp\left[\frac{\omega}{a}(x - D + a)\right] \qquad (|x| \le a) \tag{۴.۳۹ ب}$$

با جایگزینی معادلات(۴.۳۹) در معادله (۴.۳۸) و با استفاده از معادلات ویژه مقداری برای مد TE به فرم $\omega = \mathrm{u}\tan(\mathrm{u})$، معادله (۴.۳۸) به صورت زیر بیان می‌شود :

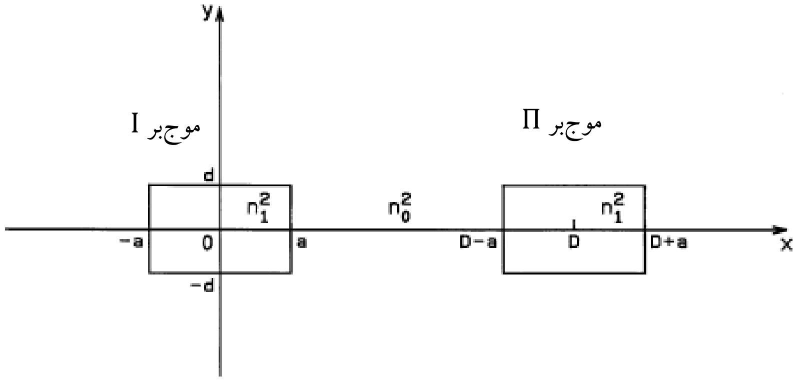
$$\mathrm{k} = \frac{k^2}{\beta}({n_1}^2 - {n_0}^2)\frac{u^2\omega^2}{(1+\omega)\nu^4}\exp\left[-\frac{\omega}{a}(D - 2a)\right] \tag{۴.۴۰}$$

می‌توان معادله (۴.۴۰) را با استفاده از تقریب $\beta \cong kn_1 \;\; and \;\; (n_1^2 - n_0^2) = 2n_1^2\Delta$ به صورت زیر بازنویسی کرد :

$$\mathrm{k} = \frac{\sqrt{2\Delta}}{a}\frac{u^2\omega^2}{(1+\omega)\nu^3}\exp\left[-\frac{\omega}{a}(D - 2a)\right] \tag{۴.۴۱}$$

۲-۴-۴. ضرایب جفت‌شدگی برای موجبرهای مستطیلی

مطابق شکل ۹-۴، جفت‌شونده‌های جهتی شامل موجبر مستطیلی سه بعدی هستند.



شکل ۹-۴. ضرایب جفت‌شدگی برای موجبرهای مستطیلی.

در تحلیل مد E_{11}^x از معادله (۴.۱۲) استفاده می‌کنیم و به $\mathrm{H_x} = 0$ می‌رسیم. برای مد $\mathrm{E_{11}^x}$ ، مطابق با معادله (۴.۹) به این نتیجه می‌رسیم که $|\mathrm{E_y}| \ll |\mathrm{E_x}|$ و سپس ضریب جفت‌شدگی مد برابر می‌شود با :

$$k = \frac{\omega\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty}({n_1}^2 - {n_0}^2)\int_{-a}^{a}\int_{-d}^{d} \mathrm{E_{1x}}^*.\mathrm{E_{2x}} \mathrm{dx\, dy}}{2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{E_{1x}}^*.\mathrm{H_{1y}}\mathrm{dx\, dy}} \qquad (۴.۴۲)$$

با جایگزینی معادله (۲.۳۷) در معادله (۴.۴۲) و با استفاده از رابطه $E_x \cong (\omega\mu_0/\beta)H_y$ معادله (۴.۴۲) به صورت زیر بیان می‌شود :

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{E_{1x}}^*.\mathrm{H_{1y}}\mathrm{dx\, dy} \cong \frac{2\omega\mu_0}{\beta}|\mathrm{A}|^2\left(a + \frac{1}{\gamma_x}\right)\left(d + \frac{1}{\gamma_y}\right) \qquad (۴.۴۳)$$

$$\omega\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty}({n_1}^2 - {n_0}^2)\int_{-a}^{a}\int_{-d}^{d}\mathrm{E_{1x}}^*.\mathrm{E_{2x}}\mathrm{dx\, dy} \cong$$

$$\frac{2\omega\mu_0}{\beta}|\mathrm{A}|^2\left(d + \frac{1}{\gamma_y}\right)\frac{{k_x}^2\gamma_x a^2}{\gamma_x} \times \exp[-\gamma_x(\mathrm{D} - 2a)] \qquad (۴.۴۴)$$

در اینجا فرکانس نرمالیزه برابر با $v = kn_1 a\sqrt{2\Delta}$ می‌باشد و ضریب جفت‌شدگی با رابطه زیر بیان می‌شود :

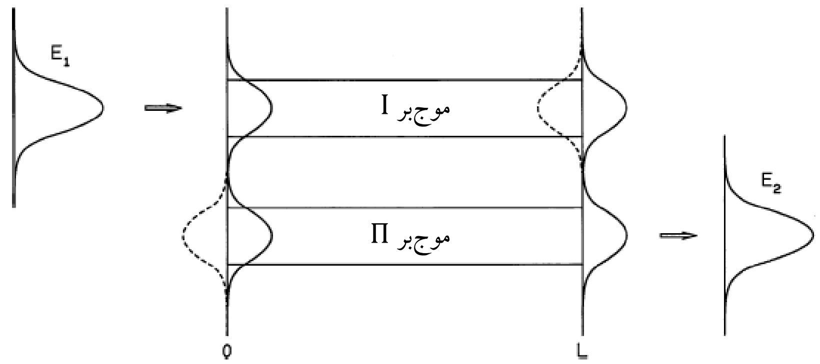
$$\mathrm{k} = \frac{\sqrt{2\Delta}}{a}\frac{(k_x a)^2(\gamma_x a)^2}{(1+\gamma_x a)v^3}\exp[-\gamma_x(\mathrm{D} - 2a)] \qquad (۴.۴۵)$$

۳-۴-۴. ضریب جفت‌شدگی براساس تداخل مد

مطابق شکل ۱۰-۴، اثر جفت‌شدگی مد در جفت‌شونده جهتی توسط پدیده تداخل مد بین مدهای زوج و فرد در موجبرهای صفحه‌ای پنج لایه مورد بررسی قرار خواهد گرفت. هنگامی که می‌توان مدهای مرتبه بالاتر در میدان الکتریکی جفت‌شونده جهتی را با مجموع مد زوج (مد مرتبه اول در موجبر پنج لایه‌ای) و مد فرد (مد مرتبه دوم در موجبر پنج لایه‌ای)تقریب زد، داریم :

$$\mathrm{E(x,z)} = \mathrm{E}_e\mathrm{(x)}\exp(-j\mathrm{B}_e\mathrm{z}) + \mathrm{E_0(x)}\exp(-j\mathrm{B_0 z}) \qquad (۴.۴۶)$$

$E_e(x)$ و β_e نشان دهنده میدان الکتریکی و ثابت انتشار مد زوج است و $E_o(x)$ و β_o نشان دهنده مد فرد است.



شکل ۱۰-۴. حالت زوج (خط تو پر) و فرد (خط نقطه‌چین) در موجبر صفحه‌ای پنج لایه.

میدان الکتریکی موج فرودی که به موجبرا I در $z = 0$ وارد می‌شود توسط رابطه زیر بیان می‌شود :

$$|\mathrm{E}(\mathrm{x},0)| = |\mathrm{E}_e(\mathrm{x}) + \mathrm{E}_0(\mathrm{x})| = \mathrm{E}_1(\mathrm{x}) \qquad (۴.۴۷)$$

$\mathrm{E}_1(x)$ نشان دهنده ویژه مد موجبرا I است. هنگامی که هسته‌های موجبرهای I و II به هم نزدیک نباشند، این عبارت با تقریب خوبی برقرار است. اندازه میدان الکتریکی در z از معادله (۴.۴۶) بدست می‌آید :

$$|\mathrm{E}(\mathrm{x},z)| = |\mathrm{E}_e(\mathrm{x}) + \mathrm{E}_0(\mathrm{x})[\exp(j(\mathrm{B}_e - \mathrm{B}_0)\mathrm{z})]| = \mathrm{E}_1(\mathrm{x}) \qquad (۴.۴۸)$$

توزیع میدان الکتریکی در $z = \pi/(\beta_e - \beta_o)$ با رابطه زیر بیان می‌شود :

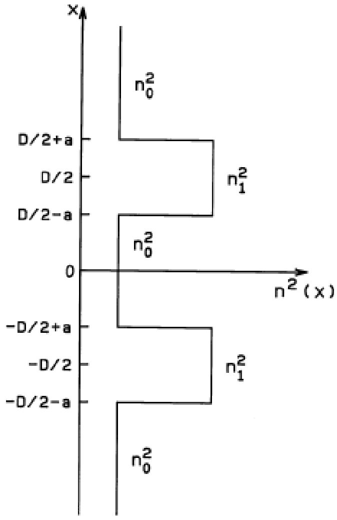
$$|\mathrm{E}(\mathrm{x},z)| = |\mathrm{E}_e(\mathrm{x}) - \mathrm{E}_0(\mathrm{x})| = \mathrm{E}_2(\mathrm{x}) \qquad (۴.۴۹)$$

$\mathrm{E}_2(x)$ نشان‌دهنده ویژه مد موجبر II است. طبق معادله (۴.۴۹) ، در فاصله $\mathrm{L}_c = \pi/(\mathrm{B}_e - \mathrm{B}_0)$ ، میدان فرودی وارد شده به موجبرا I ، به موجبرا II ، تغییر مکان می‌دهد و ضریب جفت‌شدگی برابر با $\mathrm{k} = \pi/2\mathrm{L}_c = (\mathrm{B}_e - \mathrm{B}_0)/2$ می‌باشد. مطابق شکل ۱۱-۴، برای یافتن ضریب جفت‌شدگی مد κ برای مد TE در یک موجبر صفحه‌ای پنج لایه‌ای از معادلات ویژه مقداری برای موجبرهای پنج لایه در سیستم مختصاتی استفاده می‌کنیم :

$$\begin{cases} 2\mathrm{u} = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{u}\right) + \tan^{-1}\left\{\frac{\omega}{u}\tanh\left[\left(\frac{\mathrm{D}}{2a} - 1\right)\omega\right]\right\} & \text{مد زوج} \\ 2\mathrm{u} = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{u}\right) + \tan^{-1}\left\{\frac{\omega}{u}\coth\left[\left(\frac{\mathrm{D}}{2a} - 1\right)\omega\right]\right\} & \text{مد فرد} \end{cases} \qquad (۴.۵۰)$$

در اینجا $u = a\sqrt{k^2 {n_1}^2 - \beta^2}$ و $\omega = a\sqrt{\beta^2 - k^2 {n_0}^2}$ می‌باشد. هنگامی که فاصله بین مرکزها به بینهایت میل کند $(\mathrm{D} \to \infty)$ ، معادلات (۴.۵۰) به معادله ویژه مد برای یک تک موجبر صفحه‌ای یعنی $\mathrm{u}_0 = \tan^{-1}(\omega_0/u_0)$ کاهش می‌یابند و هنگامی که جفت‌شدگی مد بین دو موجبر ضعیف است، این معادلات ویژه مد به صورت یک اختلال $\beta_e = \beta^{(0)} + \delta\beta_e$ بیان می‌شوند.با جایگزینی این اختلال در مد زوج معادله (۴.۵۰) ، داریم :

$$2u = 2a\sqrt{k^2{n_1}^2 - (\beta^{(0)} + \delta\beta_e)^2} \cong 2u_0 - \frac{2\beta^{(0)}a^2}{u_0}\delta\beta_e \qquad (۴.۵۱)$$



شکل ۱۱-۴. توزیع ضریب شکست موج‌بر صفحه‌ای پنج لایه.

به طور مشابه هر جمله از سمت راست معادلات(۴.۵۰) را می‌توان به صورت زیر تقریب زد :

$$\begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{u}\right) \cong u_0 + \frac{\beta^{(0)}a^2}{u_0}\delta\beta_e & \text{مد زوج} \\ \tan^{-1}\left\{\frac{\omega}{u}\coth\left[\left(\frac{D}{2a} - 1\right)\omega\right]\right\} \cong -u_0 + \frac{\beta^{(0)}a^2}{u_0}\delta\beta_e - \frac{2u_0\omega_0}{{\upsilon_0}^2}\exp\left[-2\omega_0\left(\frac{D}{2a} - 1\right)\right] & \text{مد فرد} \end{cases} \qquad (۴.۵۲)$$

در اینجا از تقریب $tanh(z) \cong 1 - 2e^{-2z}$ استفاده شد. با جایگزینی معادلات(۴.۵۱) و(۴.۵۲) در معادله (۴.۵۱) داریم:

$$\frac{(1+\omega_0)}{u_0\omega_0}\beta^{(0)}a^2\delta\beta_e = u_0 + \frac{u_0\omega_0}{{\upsilon_0}^2}\exp\left[-\frac{\omega_0}{a}(D - 2a)\right] \qquad (۴.۵۳)$$

به طریق مشابه برای $\delta\beta_0 = \beta_0 - \beta^{(0)}$ ، داریم :

$$\frac{(1+\omega_0)}{u_0\omega_0}\beta^{(0)}a^2\delta\beta_e = u_0 - \frac{u_0\omega_0}{{\upsilon_0}^2}\exp\left[-\frac{\omega_0}{a}(D - 2a)\right] \qquad (۴.۵۴)$$

با جایگزینی معادلات (۴.۵۳) و (۴.۵۴) در $k = \pi/2L_c = (B_e - B_0)/2$ ، ضریب جفت‌شدگی مد κ بدست می‌آید:

$$\kappa = \frac{(\delta B_e - \delta B_0)}{2} = \frac{{u_0}^2{\omega_0}^2}{\beta^{(0)}a^2(1+\omega_0){\upsilon_0}^2}\exp\left[-\frac{\omega_0}{a}(D - 2a)\right] \qquad (۴.۵۵)$$

هنگامی که از تقریب‌های $\beta^{(0)} \cong kn_1\ v_0^2 = k^2a^2(n_1^2 - n_0^2)$ استفاده شود، معادله (۴.۵۵) به (۴.۴۰) کاهش می‌یابد.

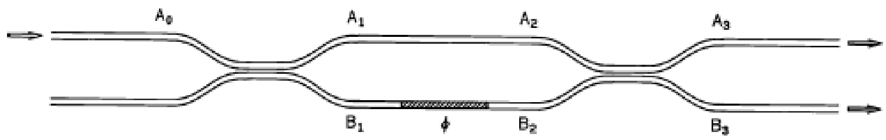
۵-۴. ابزارهای موج‌بر اپتیکی با استفاده از جفت‌شونده‌های جهتی

جفت‌شونده‌های جهتی از مهمترین عناصر ساخت ابزارهای اپتیکی هستند، پس به بررسی چندین ابزار اپتیکی با استفاده از جفت‌شونده‌های جهتی می‌پردازیم.

۴-۵-۱. تداخل سنج ماخ زندر

مطابق شکل ۱۲-۴، اگر نور وارد موجبر بالایی تداخل سنج ماخ زندر شود، دو بازو دارای ساختارهای موجبر یکسانی هستند. بنابراین در معادلات (۴.۱۹) به $q = \kappa$ و $\delta = 0$ می‌رسیم. با جایگزینی $A(0) = A_0$ و $B(0) = 0$ در معادلات (۴.۱۹) ، خروجی جفت‌شونده جهتی با رابطه زیر بیان می‌شود :

$$\begin{cases} A_1 = A_0 \cos(\kappa\ell) \\ B_1 = -jA_0 \sin(\kappa\ell) \end{cases} \qquad (۴.۵۶)$$



شکل ۱۲-۴. تداخل سنج ماخ زندر.

چون جفت‌شدگی مد هم در ناحیه جفت‌شدگی مستقیم و هم در ناحیه خمیده رخ می‌دهد، پس طول جفت‌شدگی l، طول موثر جفت‌شدگی است که شامل همه اثرات جفت‌شدگی در ناحیه مستقیم و ناحیه خمیده جفت‌شده است.هنگامی که جفت‌شونده نخست $3-dB$ باشد آنگاه $\kappa l = \pi/4$ است و نسبت تقسیم نوری $A_1 = A_0/\sqrt{2}$ و $B_1 = -jA_0/\sqrt{2}$ است. بعد از عبور از بازوهای مستقیم تداخل سنج، A_2 و B_1 برابرند با :

$$\begin{cases} A_2 = A_1 \exp(-j\beta L) = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \exp(-j\beta L) \\ B_2 = B_1 \exp(-j\beta L + j\phi) = -j\frac{A_0}{\sqrt{2}} \exp(-j\beta L + j\phi) \end{cases} \qquad (۴.۵۷)$$

ϕ تغییرات فاز اضافی در بازوی پایینی شکل ۱۲-۴ است. سپس خروجی تداخل سنج با جایگزینی معادلات(۴.۵۷) در معادلات (۴.۱۹) بدست می‌آید :

$$\begin{cases} A_3 = -jA_0 \sin(\frac{\phi}{2}) \exp\left(-j\beta L + \frac{j\phi}{2}\right) \\ B_3 = -jA_0 \cos(\frac{\phi}{2}) \exp\left(-j\beta L + \frac{j\phi}{2}\right) \end{cases} \qquad (۴.۵۸)$$

اگر جفت‌شونده دوم نیز $3-dB$ باشد آنگاه $\kappa l = \pi/4$ است. شدت اپتیکی هر خروجی برابر است با :

$$\begin{cases} |A_3|^2 = |A_0|^2 \sin^2(\frac{\phi}{2}) \\ |B_3|^2 = |A_0|^2 \cos^2(\frac{\phi}{2}) \end{cases} \qquad (۴.۵۹)$$

بنابراین نور از درگاه A به درگاه B و بالعکس با تغییر ϕ از π به صفر سوئیچ می‌شود. هنگامی که تداخل سنج ماخ زندر بعنوان یک مدوله ساز اپتیکی مورد استفاده قرار گیرد، فاز اپتیکی ϕ متناسب با سیگنال ورودی مدوله می‌شود و هنگامی که فاز ϕ را به مقدار $\delta\phi$ مدوله سازیم، شدت خروجی به صورت $|A_3|^2 \cong |A_0|^2(\delta\phi/2)^2$ و $|B_3|^2 \cong |A_0|^2$ بیان

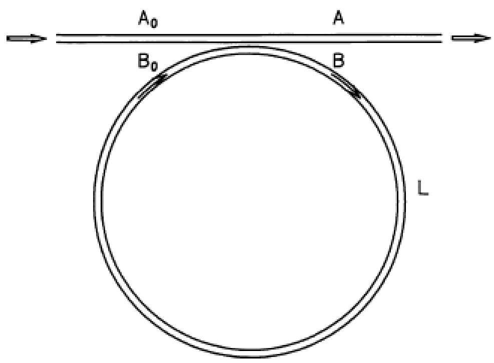
می‌شود. پس مدوله‌سازی خطی با این شرایط حاضر حاصل نمی‌شود. اگر یک فاز بایاس $\pi/2$ اضافه شود و فاز مدوله $\delta\phi$ در معادله اول (۴.۵۹) را بکار گیریم، داریم :

$$|A_3|^2 = |A_0|^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{j\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}|A_0|^2|1+\sin(\delta\phi)| \cong \frac{1}{2}|A_0|^2(1+\delta\phi) \qquad (۴.۶۰)$$

پس شدت اپتیکی بطور خطی با سیگنال ورودی $\delta\phi$ متناسب می‌شود.

۲-۵-۴. مشددهای حلقوی

نور تحت شرایط خاصی می‌تواند در تشدیدگر حلقوی به نوسان درآید. نور پس از یک دور چرخش در تشدیدگر، تغییرات فاز ϕ پیدا می کند که متناسب با طول موج نور، ضریب شکست محیط و شعاع حلقه است. اگر شرط تشدید برقرار باشد این تغییرات فاز باید متناسب با مضرب صحیحی از طول موج نور باشند. بنابراین طول موج های تشدید بدست می‌آیند، یعنی اگر شرط تشدید برقرار باشد، شدت نور تا چندین برابر در حلقه افزایش می‌یابد و اگر شرط تشدید برقرار نباشد، تداخل ویرانگر رخ داده و شدت نور در بعضی طول موج‌ها حتی می‌تواند به صفر نیز برسد.



شکل ۱۳-۴. تشدیدگر حلقوی اپتیکی.

مطابق شکل ۱۳-۴، روابط حالت پایای ورودی-خروجی مشدد حلقوی اپتیکی توسط رابطه زیر بیان می‌شود :

$$\begin{cases} A = (1-\gamma)^{\frac{1}{2}}[A_0\cos(\kappa\ell) - jA_0\sin(\kappa\ell)] \\ B = (1-\gamma)^{\frac{1}{2}}[-jA_0\sin(\kappa\ell) - B_0\cos(\kappa\ell)] \end{cases} \qquad (۴.۶۱)$$

در اینجا، κ ضریب جفت‌شدگی مد جفت شونده جهتی، l طول جفت‌شدگی و γ ضریب افت شدت است. در معادلات (۴.۶۱) فرض شد که ورودی/خروجی و موجبر تشدیدگر دارای ثابت β یکسان هستند. اگر ضریب میرایی شدت موجبر حلقوی را با B_0 بیان کنیم، به رابطه $B_0 = B\exp(L\rho/2 - jBL)$ می‌رسیم. بنابراین اندازه عبور مشدد حلقوی اپتیکی برابر می‌شود با :

$$\frac{A}{A_0} = (1-\gamma)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\cos(\kappa\ell)-(1-\gamma)^{\frac{1}{2}}\,exp(-\frac{\rho}{2}L-jBL)}{1-(1-\gamma)^{\frac{1}{2}}\,\cos(\kappa\ell)exp(-\frac{\rho}{2}L-jBL)}\right] \qquad (۴.۶۲)$$

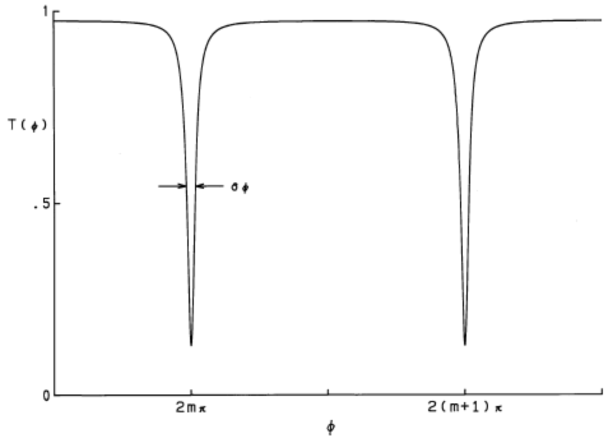
شدت عبوری تشدیدگر حلقوی اپتیکی برابر است با :

$$T(\phi) = \left|\frac{A}{A_0}\right|^2 = (1-\gamma)\left[1 - \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1-xy)^2+4xy\,\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}\right] \qquad \begin{cases} x = (1-\gamma)^{\frac{1}{2}}\,exp(-\frac{\rho}{2}L) \\ y = \cos(\kappa\ell) \\ \phi = BL \end{cases} \qquad (۴.۶۲)$$

مطابق شکل ۱۴-۴، خصوصیات انتقال مشدد حلقوی اپتیکی برحسب تابعی از ϕ می‌باشد. ماکزیمم و مینیمم ضریب عبور توسط رابطه زیر بیان می‌شود :

$$\begin{cases} T_{max} = (1-\gamma)\,\frac{(x+y)^2}{(1+xy)^2} \\ T_{max} = (1-\gamma)\,\frac{(x+y)^2}{(1+xy)^2} \end{cases} \qquad (۴.۶۳)$$

بنابراین هنگامی که $x \cong y \cong 1$ باشد، T_{max} به بیشترین مقدار خود و T_{min} کمترین مقدار خود خواهد رسید. پهنا در نیمه ماکزیمم (FWHM) ، برابر با $\delta\phi = 2(1-xy)/\sqrt{xy}$ است و ضرایب ظرافت تشدیدگر برابر با $F = 2\pi/\delta\phi = \pi\sqrt{xy}/(1-xy)$ می‌باشد. پیک تشدید T_{min} در معادله (۴.۶۳) برابر با $\phi = \beta L = 2m\pi$ می‌باشد. همچنین هنگامی که $x = y$ باشد، T_{min} برابر با صفر می‌شود و یا برابر با $\cos(\kappa\ell) = (1-\gamma)^{1/2}\exp(-L\rho/2)$ می‌شود.



شکل ۱۴-۴. خصوصیات انتقال مشدد حلقوی اپتیکی.

برای یافتن فاصله بین دو پیک تشدید، باید اعداد موج مربوط به $\phi = 2m\pi$ را با k و $\phi = 2(m+1)\pi$ را با $(k+\Delta k)$ بیان کرد. چون m عددی بزرگ است، تغییرات Δk در مقایسه با k ، خیلی کوچک است ($|\Delta k| \ll k$). همچنین به دلیل تغییرات کوچک عدد موج، تغییرات در β بصورت $[\beta(k+\Delta k) - \beta(k)] = 2\pi/L$ بدست می‌آید و با محاسبه رابطه $k \gg |\Delta k|$ ، به صورت $\Delta k d\beta/dk = 2\pi/L$ بازنویسی می‌شود. با جایگزینی $\beta = kn$ (n ضریب شکست موثر است) در معادله بالا داریم :

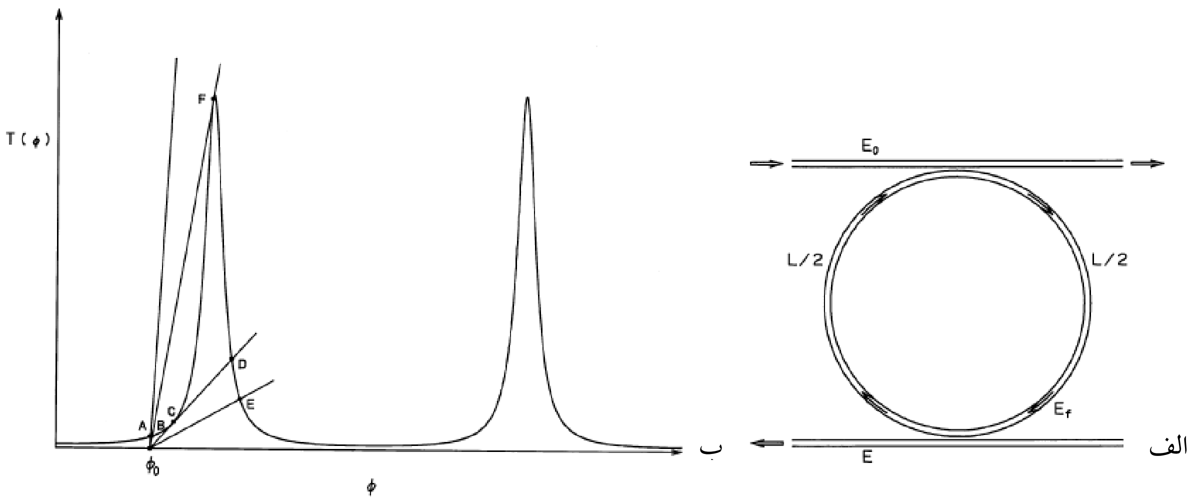
$$\frac{d\beta}{dk}\Delta k = \frac{2\pi}{L} \qquad \rightarrow \qquad \frac{d\beta}{dk} = n + k\frac{dn}{dk} = n - \lambda\frac{dn}{dk} = N \qquad (۴.۶۴)$$

N ضریب گروه است و از معادله (۳.۹۳) بدست می‌آید. چون شیفت فرکانسی Δf و شیفت طول موجی $\Delta\lambda$ مربوط به تغییرات عدد موج Δk است و بصورت $\Delta f = (c/2\pi)\Delta k$ و $\Delta\lambda = -(\lambda^2/2\pi)\Delta k$ بیان می‌شوند پس فواصل فضایی در عبارت طول موج و فرکانس توسط روابط $\Delta f = c/NL$ و $\Delta\lambda = \lambda^2/NL$ بیان می‌شوند. فاصله فرکانسی دو پیک تشدید را گستره طیفی آزاد (FSR) می‌نامند. FWHM ها در عبارت‌های فرکانس و طول موج در پیک‌های تشدید برابرند با $\Delta f = c/FNL$ و $\Delta\lambda = \lambda^2/FNL$ می‌باشند (در اینجا از رابطه $\delta\phi = \delta(\beta L) = \left(\frac{d\beta}{dk}\right)\delta k \cdot L = 2\pi/F$ استفاده شد.

۳-۵-۴. ابزارهای دوپایداری اپتیکی

مطابق شکل ۱۵-۴ الف، ضریب شکست موجبر اپتیکی تشدیدگر حلقوی با شدت نور تغییر می کند. شدت عبوری تشدیگر حلقوی با استفاده از رابطه $\mathrm{B_0 = B\exp(L\rho/2} - j\mathrm{BL)}$ بدست می آید :

$$T(\phi) = \left|\frac{E}{E_0}\right|^2 = \frac{P}{P_0} = (1-\gamma)\frac{x^2(1-y^2)}{(1-xy)^2+4xy\,\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \qquad (۴.۶۵)$$



شکل ۱۵-۴. الف. نوع باز تشدیدگر حلقوی اپتیکی. ب. نمایش گرافیکی دستگاه اپتیکی و وابستگی شدت عبوری به فاز اپتیکی ϕ.

شدت عبوری در راستای $P_f \to P$ با رابطه زیر بیان می‌شود :

$$(1-\gamma)\sin^2(\kappa\ell) = (1-\gamma)[1-cos^2(\kappa\ell)] = (1-\gamma)(1-y^2) \qquad (۴.۶۶)$$

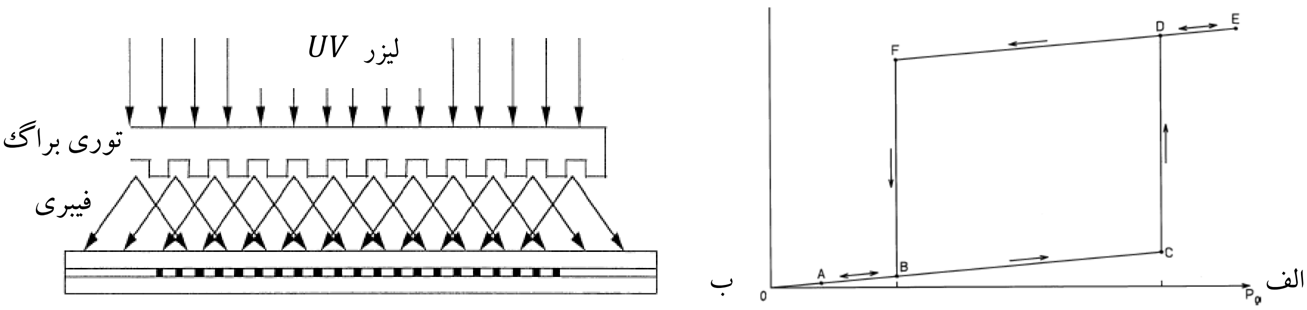
چون اندازه عبور در راستای $E_f \to E$ با رابطه $-j\sqrt{1-\gamma}\,sin(\kappa l)$ بیان می‌شود، پس رابطه بین توان اپتیکی در داخل رینگ P_f و توان خروجی P به صورت $P = (1-\gamma)(1-y^2)P_f$ بیان می‌شود. فاز اپتیکی ϕ در یک محیط کر توسط رابطه زیر بیان می‌شود :

$$\phi = \beta L = \kappa nL = \kappa(n_0 + n_2\frac{P_f}{A_{eff}})L \qquad (۴.۶۷)$$

در اینجا n_2 ضریب شکست کر و A_{eff} مساحت موثر هسته موج‌بر است. با قرار دادن $P = (1-\gamma)(1-y^2)P_f$ در معادله (۴.۶۶) ، داریم :

$$\begin{cases} T(\phi) = \frac{P}{P_0} = \frac{S}{P_0}(\phi - \phi_0) \\ \phi_0 = \kappa n_0 L \\ S = (1-\gamma)(1-y^2)\frac{A_{eff}}{\kappa n_2 L} \end{cases} \tag{۴.۶۸}$$

چندین خط مستقیم در شکل ۱۵-۴ ب، نمایشگر معادله اول(۴.۶۸) برای توان ورودی متفاوت P_0 هستند. هنگامی که به فاز اپتیکی ثابت ϕ (کوک)، مقدار مناسبی داده شود آنگاه توان خروجی P در راستای $A \to B \to C \to D \to E$ بر اساس توان ورودی تغییر می‌کند (شکل ۱۶-۴ الف). همچنین هنگامی که توان ورودی کاهش می‌یابد، توان خروجی در راستای $A \to B \to F \to D \to E$ تغییر می‌کند. بنابراین، یک دوپایداری برای توان ورودی یکسان P اما در چرخش‌های متفاوت بدست می‌آید.



شکل ۱۶-۴. الف. منحنی دستگاه اپتیکی دو پایداری. ب. روش ساخت توری براگ فیبری با استفاده از ماسک فازی.

۶-۴. توری براگ فیبری

توری براگ فیبری که اختلال متناوبی از ضریب شکست در هسته فیبر می‌باشد، به عنوان یک فیلتر بازتابی با قابلیت طول موج انتخابی عمل می‌کند. در معرض UV قرار گرفتن منجر به تغییر ضریب شکست در شیشه سیلیکا آغشته به ژرمانیم می‌گردد. یک توری براگ فیبری هنگامی که در معرض طرح تداخل UV قرار می‌گیرد، هسته فیبر در جهت عرضی ساخته می‌شود. شکل ۱۶-۴ ب، روش ساخت توری با استفاده از یک ماسک فازی را بیان می‌کند. طول موج نور UV مربوط به باند جذب از شیشه آغشته به ژرمانیم ساخته می‌شود. به طور معمول لیزر اگزایمر KrF یا لیزر $SHG\ Ar$ بعنوان یک چشمه نوری UV استفاده می‌شود. حساسیت به نور را می‌توان با افزایش غلظت ژرمانیم یا افزایش هیدروژن بالا برد. طیف بازتابی فیلتر توری براگ فیبری توسط معادلات (۴.۳۱) بدست می‌آید و اگر توری تشکیل شده یکنواخت باشد، سطح جانبی طیف بازتابی تا حدی بزرگ می‌شود. برای تنظیم اندازه مدوله‌سازی و فشرده‌سازی لیزر جانبی موثر از یک سری تابع پنجره‌ای استفاده می‌شود.

منابع

[1] Marcuse, D. 1972. *Light Transmission Optics*. New York: Van Nostrand Reinhold.

[2] Marcatili, E. A. J. 1986. Improved coupled-mode equations for dielectric guides. *IEEE J.Quantum Electron*. QE-22:988–993.

[3] Koyama, F., Y. Suematsu, K. Kojima, and K. Furuya. 1984. 15_m phase adjusted active distributed reflector laser for complete dynamic single-mode operation. *Electron. Lett*. 10:391–393.

[4] Marcuse, D. 1974. *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. New York: Academic Press.

[5] Watson, G. N. 1962. *Theory of Bessel Functions*. New York: Cambridge University Press.

[6] Streifer, W., D. R. Scifres, and R. D. Burnham. 1975. Coupling coefficients for distributed feedback single- and double-heterostructure diode lasers. *IEEE J. Quantum Electron*. QE-11:867–873.

[7] Stegeman, G. I., E. M. Wright, N. Finlayson, R. Zanoni, and C. T. Seaton. 1988. Third order nonlinear integrated optics. *IEEE J Lightwave Tech*. LT-6:953–970.

[8] Hill, K. O., Y. Fujii, D. C. Johnson, and B. S. Kawasaki. 1978. Photosensitivity in optical fiber waveguides: Application to reflection filter fabrication. *App. Phys. Lett*. 32:647–649.

[9] Scherer, G. W. 1980. Stress-induced index profile distribution in optical waveguides. *Appl.Opt*. 19:2000–2006.

[10] Meltz, G., W. W. Morey, and W. H. Glenn. 1989. Formation of Bragg gratings in optical fibers by a transverse holographic method. *Opt. Lett*. 14:823–825.

[11] Snitzer, E. 1961. Cylindrical dielectric waveguide modes. *J. Opt. Soc. Amer*. 51:491–498.

[12] Snyder, A. W. 1969. Asymptotic expression for eigenfunctions and eigenvalues of dielectric optical waveguides. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech*. MTT-17:1130–1138.

[13] Gloge, D. 1971. Weakly guiding fibers. *Appl. Opt*. 10:2252–2258.

[14] Carson, J. R., S. P. Mead, and S. A. Schelkunoff. 1936. Hyper frequency waveguides— Mathematical theory. *Bell. Syst. Tech. J*. 15:310–333.

[15] Shibata, N. and T. Edahiro. 1980. Refractive index dispersion properties of glasses for optical fibers (in Japanese). Paper of Technical Group, IEICE Japan, no.OQE80, pp.114–118.

[16] Birks, T. A. J. C. Knight and P. St. J. Russell. 1997. Endlessly single-mode photonic crystal fiber. *Opt. Lett*. 22:961–963.

[17] Tamir, T. 1975. *Integrated Optics*. Chap. 2, Berlin: Springer-Verlag.

[18] Bachmann, M., P. A. Besse and H. Melchior. 1994. General self-imaging properties in N×N multimode interference couplers including phase relations. *Appl. Opt*. 33:3905–3911.

[19] Heaton, J. M. and R. M. Jenkins. 1999. General matrix theory of self-imaging in multimode interference (MMI) couplers. *IEEE Photon. Tech. Lett*. 11:212–214.

[20] Marcuse, D. 1972. *Light Transmission Optics*. New York: Van Nostrand Rein-hold.

[21] Stratton, J. A. 1941. *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill.

[22] Knox, R. M. and P. P. Toulios. 1970. Integrated circuits for the millimeter through optical frequency range. *Symposium on Submillimeter Waves*, Polytechnic Institute of Brooklyn, pp. 497–516.

بیوگرافی نویسنده :

حمید عباسی (لیسانس فیزیک اتمی مولکولی – فوق لیسانس فوتونیک)

ایمیل : abbasiamolihamid6@gmail.com

آدرس orcid : https://orcid.org/0000-0002-1492-4541

آدرس گوگل اسکولار : hamidabbasi

لیست مقالات نویسنده :

1. Construction and Evaluation of Plasmonic Refractive Index Sensor Based on Changing the Number of Resonators and Changing Their Dimensions. *Preprints*.2022.

2. Design of a plasmonic refractive index sensor based on the amplifier system with two plasmonic waveguides and four cavities with different dimensions and coordinates. *World J Clin Med Img*, 1 (1), 76 80. 2022.

3. Plasmonic refractive index sensor based on resonant system with two plasmonic waveguides, two rings and two cavities. *Universal J. Phys. Appl.*1-7. 2021.

4. Investigating types of Plasmonic Sensors and their Applications. *ESP International Journal of Advancements in Computational Technology*. 2023.

5. Employment of Resonators for Resolution Enhancement in Plasmonic Refractive Index Sensors. *computer-science-journal, 9* . 2023.

6. Design and Measurement of Plasmonic Refractive Index Sensor Based on Resonance System with Two Rings, Two Cavities and Two Plasmonic Waveguides. *BIOMEDICAL JOURNAL, 13.* 2023.

7.How to Assemble and Adjust Fiber Laser Welding Machine. *Journal of Agricultural, Earth and Environmental Sciences, 4.* 2023.

8. Design and Simulation of Plasmonic Sensor by Changing the Refractive Index and Based on a Resonance System Using Two Rings, Two Cavities and Two Plasmonic Waveguides. *Journal of Agricultural, Earth and Environmental Sciences, 8.* 2023.

9. Investigation of a Very Sensitive Refractive Index Sensor Based On Waveguide Tm Mode Resonance and Design of a Plasmonic Sensor. *International Journal of Computer Science and Mobile Applications 11 (3), 17.* 2023.

10. Design and Analysis of a Plasmonic Refractive Index Sensor with Symmetrical Cavities and Rings. *International Journal of Computer Science and Mobile Applications 11 (3), 17.* 2023.

11. Construction and Evaluation of Plasmonic Refractive Index Sensors Based on Dimensional Change and Number of Resonators. *Petro Chem Indus Intern 6 (4), 261-272.* 2023.

12. Plasmonic Refractive Index Sensor Including Two Waveguides, Rings and Two Cavities with Teeth Connected on Fano Resonances. *Petro Chem Indus Intern 6 (4), 240-247.* 2023.

13. Design and manufacture of refractive index sensors based on a resonator system with two plasmonic waveguides and two connected cavities. *World J Clin Med Img 2 (2), 53-55.* 2023.

14. Plasmon-induced flexibility and refractive index measurement in a sensor designed by a cavity, two rings, two teeth and two plasmonic waveguides. *Research Article 1, 10.* 2022.

15. Design and Simulation of Plasmonic Sensor by Changing the Refractive Index and Based on a Resonance System Using Two Rings, Two Cavities and Two Plasmonic Waveguides. . *Preprints.*2022

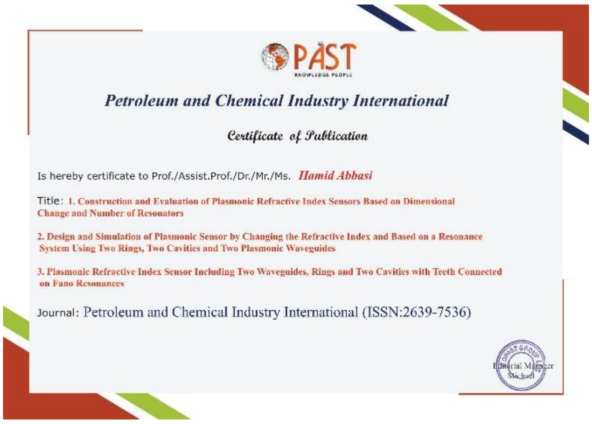
16. Plasmon-Induced Flexibility and Refractive Index Measurement in a Sensor Designed By A Cavity, Two Rings, Two Teeth and Two Plasmonic Waveguides. *Petroleum and Chemical Industry International, 5.* 2022.

17. Tunable Plasmonic Band-Pass Filter Using Five Circular Ring Resonators. *Int J Clin Med Info 5 (1), 26-32.* 2022.

18. Design of an advanced plasmonic sensor (consisting of a quadrilateral cavity, three rings with different dimensions and two waveguides) using refractive index change. *Preprints.* 2022.

19. Construction and testing of a plasmonic sensor using an amplifier system (one cavity and two rings) with two plasmonic waveguides. *Preprints.* 2021.


BIOMEDICAL
CERTIFICATE OF PUBLICATION
This Certificate is Awarded to
HAMID ABBASI
As an acknowledgement to publication of paper titled
"Design and measurement of plasmonic refractive index sensor based on resonance system with two rings, two cavities and two plasmonic waveguides"
Published in
"Biomedical Journal of Scientific & Technical Research (BJSTR) (ISSN: 2574-1241)"
Publication Date: August 08th, 2023
Volume 52- Issue 1
DOI: 10.26717/BJSTR.2023.52.008201
biomedres.us


PAST
Petroleum and Chemical Industry International
Certificate of Publication
Is hereby certificate to Prof./Assist.Prof./Dr./Mr./Ms. Hamid Abbasi
Title: 1. Construction and Evaluation of Plasmonic Refractive Index Sensors Based on Dimensional Change and Number of Resonators
2. Design and Simulation of Plasmonic Sensor by Changing the Refractive Index and Based on a Resonance System Using Two Rings, Two Cavities and Two Plasmonic Waveguides
3. Plasmonic Refractive Index Sensor Including Two Waveguides, Rings and Two Cavities with Teeth Connected on Fano Resonances
Journal: Petroleum and Chemical Industry International (ISSN:2639-7536)


NC
Journal of Aquatic Research and Marine Sciences
ISSN 2639-4618
Certificate of Publication
This is to certify that
Hamid Abbasi
Published a research article title
Design of a Plasmonic Refractive Index Sensor Based on the Amplifier System with Two Plasmonic Waveguides and Four Cavities with Different Dimensions and Coordinates
In Journal of Aquatic Research and Marine Sciences, Volume 4 Issue 1, 2023
Editor/ Publisher
NorCal Open Access Publications


ISSN: 2583-8628
Eternal Scientific Publications
Scholarly Peer Reviewed International Journals
ESP International Journal of Advancements in Computational Technology [ESP-IJACT]
CERTIFICATE OF PUBLICATION
This is to certify that Dr./Mr./Ms. Hamid Abbasi of University of Mazandaran, Iran has published a paper entitled Investigating Types of Plasmonic Sensors and their Applications in the ESP International Journal of Advancements in Computational Technology [ESP-IJACT] Volume 1 Issue 2 Year 2023.
Director
Eternal Scientific Publication
Certified